41. Bốn bạn nam và bốn bạn nữ, được xếp ngồi ngẫu nhiên vào 8 ghế xếp thành hai dãy đối diện nhau. Tính xác suất sao cho:
a). Nam nữ ngồi đối diện nhau.
b).Nữ ngồi đối diện nhau.

LỜI GIẢI

Xếp 8 bạn ngồi vào 8 ghế bất kì, có 8! cách xếp. Vậy $n(\Omega)=8!$

a). Xếp một bạn nam vào 1 trong 8 ghế có 8 cách, sau đó chọn 1 bạn nữ trong 4 bạn nữ xếp vào ghế đối diện có 4 cách chọn. Tương tự xếp 1 bạn nam vào 6 ghế còn lại có 6 cách, chọn 1 bạn nữ trong 3 bạn nữ xếp vào ghế đối diện, có 3 cách chọn....

Gọi A là biến cố " Nam nữ ngồi đối diện nhau". Số trường hợp thuận lợi cho A là: $n(A)=8.4.6.3.4.2.2.1=9216$ cách.

Xác suất cần tìm: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{9216}{8!}=\dfrac{8}{35}$.

b). Xếp một bạn nữ vào 1 trong 8 ghế có 8 cách xếp, sau đó chọn 1 trong 3 bạn nữ còn lại xếp vào ghế đối diện có 3 cách chọn. Tiếp đến xếp một bạn nữ vào 1 trong 6 ghế còn lại có 6 cách chọn ghế, bạn nữ còn lại bắt buộc phải ngồi ghế đối diện có 1 cách. 4 ghế trống còn lại xếp 4 bạn nam vào, có 4! cách.

Gọi B là biến cố: "Nữ ngồi đối diện nhau". Số trường hợp thuận lợi cho B là:

$n(B)=8.3.6.1.4!=3456$ cách. Xác suất cần tìm: $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{3456}{8!}=\dfrac{3}{35}$.

42. Bốn bạn nam và bốn bạn nữ, được xếp ngồi ngẫu nhiên vào 8 ghế xếp thành hàng ngang, trong 8 bạn có hai bạn tên An và Bình. Tìm xác suất sao cho:
a). Nam nữ ngồi xen kẻ nhau.
b). Bốn bạn nam luôn ngồi cạnh nhau.
c). Đầu ghế và cuối ghế bắt buộc phải là nam.
d). Các bạn nữ không ngồi cạnh nhau.
e). Hai đầu ghế phải khác giới.
f). Các bạn nam luôn ngồi cạnh nhau và các bạn nữ luôn ngồi cạnh nhau.
g). An và Bình luôn ngồi gần nhau.
h). An và bình không ngồi cạnh nhau.

LỜI GIẢI

Xếp 8 bạn vào 8 ghế có 8! cách xếp. Vậy $n(\Omega)=8!$

a). Để xác định, các ghế được đánh số thứ tự từ 1 đến 8 tính từ trái sang phải.

Nếu các bạn nam ngồi các ghế ghi số lẻ, thì các bạn nữ phải ngồi vào các ghế ghi số chẵn. Có 4! Cách xếp bạn nam, 4! Cách xếp bạn nữ. Tất cả có 4!.4! cách xếp.

Ngược lại các bạn nam ngồi các ghế ghi số chẵn, thì các bạn nữ phải ngồi vào các ghế ghi số lẻ. Vậy cũng có 4!.4! cách xếp.

Gọi A là biến cố " Nam nữ ngồi xen kẻ nhau". Số trường hợp thuận lợi cho A là: $n(A)=2.4!.4!=1152$ cách.

Xác suất cần tìm: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1152}{8!}=\dfrac{1}{35}$

b). Gọi bốn bạn nam thành nhóm X.

Xếp X và 4 bạn nữ có 5! cách. Ứng với mỗi cách xếp trên có 4! cách xếp các bạn nam trong X. Vậy có 5!.4! cách xếp các bạn nam ngồi gần nhau.

Gọi B là biến cố "Bốn bạn nam luôn ngồi cạnh nhau". Số trường hợp thuận lợi cho B là: $n(B)=5!.4!=2880$. Xác suất cần tìm: $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{2880}{8!}=\dfrac{1}{14}$.

c). Chọn 2 bạn nam trong 4 bạn nam để xếp vào 2 ghế hai đầu, có A_4^2 cách.

Sau đó xếp 6 bạn còn lại vào 6 ghế còn lại có 6! cách. Vậy có $A_4^2.6!$ cách xếp mà hai bạn nam ngồi ở hai đầu ghế.

Gọi C là biến cố " Hai đầu ghế là nam ngồi". Số trường hợp thuận lợi cho C là:

$n(C)=A_4^2.6!=8640$. Xác suất cần tìm: $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(\Omega)}=\dfrac{8640}{8!}=\dfrac{3}{14}$.

d). Bước 1: Xếp 4 bạn nam, có 4! cách. Bước 2: Xem các bạn nam là những vách ngăn, giữa 4 bạn nam có 3 vị trí và thêm 2 vị trí ở hai đầu, tổng cộng có 5 vị trí để xếp 4 bạn nữ. Chọn 4 vị trí trong 5 vị trí để xếp nữ có A_5^4 cách. Vậy có $5!.A_5^4$ cach1 xếp mà nữ không ngồi cạnh nhau.

Gọi D là biến cố " Các bạn nữ không ngồi cạnh nhau". Số trường hợp thuận lợi cho D là: $n(D)=5!.A_5^4=14400$. Xác suất cần tìm: $P(D)=\dfrac{n(D)}{n(\Omega)}=\dfrac{14400}{8!}=\dfrac{5}{14}$.

e). Hai đầu ghế phải khác giới.

Chọn 1 bạn nam trong 4 bạn nam, có C_4^1 cách. Chọn 1 bạn nữ trong 4 bạn nữ, có C_4^1 cách.Xếp hai bạn vừa chọn vào hai ghế hai đầu, có 2! cách.

Sau đó 6 bạn còn lại xếp vào 6 ghế còn lại, có 6! cách. Vậy có $C_4^1.C_4^1.2!.6!$ cách xếp hai đầu ghế khác giới.

Gọi E là biến cố " Hai đầu ghế phải khác giới". Số trường hợp thuận lợi cho E là: $n(E)=C_4^1.C_4^1.2!.6!=23040$. Xác suất cần tìm: $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(\Omega)}=\dfrac{23040}{8!}=\dfrac{4}{7}$.

f). Gọi nhóm bạn nam là X, nhóm bạn nữ là Y.

Bước 1: Có 2! Cách xếp X và Y. Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 4! Cách xếp các bạn nam trong X và có 4! cách xếp các bạn nữ trong Y.

Vậy có $2!.4!.4!$ cách xếp các bạn nữ ngồi gần nhau và các bạn nam ngồi gần nhau.

Gọi F là biến cố " Các bạn nam luôn ngồi cạnh nhau và các bạn nữ luôn ngồi cạnh nhau". Số trường hợp thuận lợi cho F là $n(F)=2!.4!.4!=1152$

Xác suất cần tìm: $P(F)=\dfrac{n(F)}{n(\Omega)}=\dfrac{1152}{8!}=\dfrac{1}{35}$.

g).Vì An và Bình luôn ngồi gần nhau, gom hai bạn này thành nhóm X.

Bước 1: Xếp X và 6 bạn còn lại có 7! Cách.

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1 có 2! Cách xếp hai bạn trong X.

Vậy có 7!.2! cách xếp mà An và Bình luôn ngồi gần nhau.

Gọi G là biến cố " An và Bình luôn ngồi gần nhau". ". Số trường hợp thuận lợi cho C là: $n(G) = 7!.2! = 10080$. Xác suất cần tìm: $P(G) = \dfrac{n(G)}{n(\Omega)} = \dfrac{10080}{8!} = \dfrac{1}{4}$.

h). Gọi H là biến cố "An và bình không ngồi cạnh nhau". Ta có H là biến cố đối của G nên có $P(H) = 1 - P(G) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

44. Xếp ngẫu nhiên 3 người đàn ông, 2 người đàn bà và một đứa bé vào ngồi trên 6 cái ghế xếp thành hàng ngang. Tính xác suất sao cho:

a). Đứa bé ngồi giữa hai người đàn bà.

b). Đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông.

LỜI GIẢI

Xếp 6 người ngồi vào 6 ghế, số cách xếp 6!. Vậy $n(\Omega) = 6!$

a). Gọi A là biến cố " Đứa bé ngồi giữa hai người đàn bà". Để có số trường hợp thuận lợi cho A ta làm như sau:

bước 1: Gom 2 người đàn bà và em bé thành nhóm X.

Bước 2: Xếp X và 3 người đàn ông, có 4! cách.

Bước 3: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 2, có 2! cách xếp hai người đàn bà.

Theo quy tắc nhân có $4!.2! = 48$ cách. Suy ra $n(A) = 48$

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{48}{6!} = \dfrac{1}{15}$.

b). Gọi B là biến cố " Đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông". Để có số trường hợp thuận lợi cho B ta làm như sau:

Bước 1: Chọn 2 người đàn ông trong 3 người, có C_3^2 cách

Bước 2: Gom 2 người đàn ông vừa chọn và em bé thành nhóm X.

Bước 3: Xếp X và 3 người (gồm 2 đàn bà và 1 đàn ông), có 4! cách.

Bước 4: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 3, có 2! cách xếp hai người đàn ông.

Theo quy tắc nhân có $C_3^2 4!.2! = 144$ cách. Suy ra $n(B) = 144$

Vậy $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{144}{6!} = \dfrac{1}{5}$.