

Câu 4: Tìm m để phương trình $\sin^2 x + (2m - 2)\sin x \cos x - (1 + m)\cos^2 x = m$ (1) có nghiệm.

LỜI GIẢI

Nếu $\cos x = 0$ là nghiệm của (1), thì từ (1) suy ra $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \sin^2 x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Nếu $m \neq 1$ thì $\cos x = 0$ không là nghiệm của (1), khi đó chia hai vế của (1) cho

$$\cos^2 x \text{ được: } \tan^2 x + (2m - 2)\tan x - (m + 1) = m(1 + \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)\tan^2 x - 2(m - 1)\tan x + 2m + 1 = 0. \text{ Đặt } t = \tan x$$

$$\Leftrightarrow f(t) = (m - 1)t^2 - 2(m - 1)t + 2m + 1 = 0 \text{ (2).}$$

Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(2)} \geq 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - m + 2 \geq 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 1$

Kết luận với $-2 \leq m \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm.

Câu 5: Tìm m để phương trình $m(\sin x + \cos x) + \sin 2x = 0$ (1) có nghiệm.

LỜI GIẢI

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, điều kiện $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow t^2 + mt - 1 = 0$ (2). Đặt $f(t) = t^2 + mt - 1$

Ta có $\Delta_{(2)} = m^2 + 4 > 0, \forall m \Rightarrow$ (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 .

Vì có $t_1 \cdot t_2 = -1 \Rightarrow$ trong hai nghiệm này bắt buộc phải có một nghiệm thỏa $|t| \in (0; 1] \subset [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow$ phương trình (1) luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.