3). $\sin 3x\left(\cos x-2\sin 3x\right)+\cos 3x\left(1+\sin x-2\cos 3x\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x\right)-2\left(\sin^2 3x+\cos^2 3x\right)+\cos 3x=0$

$\Leftrightarrow\sin 4x-2+\cos 3x=0$

$$\Leftrightarrow\sin 4x+\cos 3x=2\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 4x=1\\ \cos 3x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ 3x=m2\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\dfrac{m2\pi}{3}\end{cases},\left(k,m\in ¢\right)$$

Nếu phương trình có nghiệm thì tồn tại các giá trị k, m sao cho :

$\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}=\dfrac{m2\pi}{3}\Leftrightarrow\dfrac{k}{2}-\dfrac{2m}{3}=\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow\dfrac{3k+4m}{6}=\dfrac{1}{8}=12k+16m=3$

$\Leftrightarrow 2\left(6k+8m\right)=3$ (không thỏa). Phương trình vô nghiệm vì: Vế trái là một số chẵn, còn vế phải là một số lẻ .

Kết luận phương trình vô nghiệm.

4). $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\sin x-\cos x+4=0$. Chia 2 vế cho 2 ta được :

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)+2=0\Leftrightarrow\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-1\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ \left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+l2\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+l2\pi\end{cases}$$. Phương trình có nghiệm khi :

$\dfrac{\pi}{12}+k\pi=-\dfrac{\pi}{3}+l2\pi\Leftrightarrow 1+12k=-4+24l\Leftrightarrow 12k-24l=-5$. Vô nghiệm với mọi $k,\ l\in ¢$ vì VT là một số chẵn, còn VP là một số lẻ .

5). $\cos 2x=\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}$. Điều kiện : $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \tan x\geq -1\end{cases}(*)$.

Đặt $t=\tan x$, điều kiện $t\geq 0$

Khi đó phương trình trở thành :

$\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{1}{1+t^2}\sqrt{1+t}\Leftrightarrow 1-t^2=\sqrt{1+t}$, điều kiện $1-t^2\geq 0\Leftrightarrow 0\leq t\leq 1$.

$\Leftrightarrow\left(1-t^2\right)^2=1+t\Leftrightarrow\left(1+t\right)\left[\left(1+t\right)\left(1-t\right)^2-1\right]=0$.

$\Leftrightarrow (1+t)(1-t)^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^3 - t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

So với điều kiện nhận $t = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in ¢)$

6). $\cos 3x + \sqrt{2-\cos^2 3x} = 2(1+\sin^2 2x)$ Ta có nhận xét sau :

Bất đẳng thức Bunhiacopxki: $\left|\cos 3x + \sqrt{2-\cos^2 3x}\right| \le \sqrt{(1^2+1^2)\left(\cos^2 3x + \left(\sqrt{2-\cos^2 3x}\right)^2\right)}$

$\Leftrightarrow \left|\cos 3x + \sqrt{2-\cos^2 3x}\right| \le 2$

Suy ra vế trái đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $\cos 3x = \sqrt{2-\cos^2 3x}$

$VP = 2(1+\sin^2 2x) \ge 2$

Vậy chỉ xảy ra khi : $\begin{cases} \cos 3x = \sqrt{2-\cos^2 3x} \\ \sin^2 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 3x = 1 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 6x = -1 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{l\pi}{2} \end{cases}$.

Nếu phương trình có nghiệm thì tồn tại k,l thuộc Z sao cho :

$-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} = \frac{l\pi}{2} \Leftrightarrow -1 + 2k = 3l \Leftrightarrow k = \frac{3l+1}{2} = l + \frac{l+1}{2}$.

Để k là nguyên thì ta chọn : $l + 1 = 2n \Rightarrow l = 2n - 1$.

Thay vào (2) nghiêm : $x = \frac{(2n+1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in Z)$

7). $\sin^{1996} x + \cos^{1996} x = 1$

$\sin^{1996} x + \cos^{1996} x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^{1996} x - \sin^2 x = \cos^2 x - \cos^{1996} x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(\sin^{1994} - 1\right) = \cos^2 x\left(1 - \cos^{1994} x\right) \quad (2)$

Ta thấy $\begin{cases} \sin^2 x \ge 0 \\ \sin^{1994} - 1 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x\left(\sin^{1994} - 1\right) \le 0, \forall x$

Ngoài ra có $\begin{cases} \cos^2 x \ge 0 \\ 1 - \cos^{1994} x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \cos^2 x\left(1 - \cos^{1994} x\right) \ge 0, \forall x$.

Do đó $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x\left(\sin^{1994} - 1\right) = 0 \\ \cos^2 x\left(1 - \cos^{1994} x\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = m\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + m\pi \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \\ x = n\pi \end{array} \right. \end{array} \right., (m, n \in ¢)$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{k\pi}{2}, (k \in ¢)$.