5). $\cos 2x + \cos x\left(2\tan^2 x - 1\right) = 2 \ \ (1)$

Điều kiện : $\cos x \neq 0$

$(1) \Leftrightarrow \cos 2x + \dfrac{2\sin^2 x}{\cos x} - \cos x = 2 \quad \Leftrightarrow \dfrac{2\sin^2 x}{\cos x} - \cos x = 2 - \cos 2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\sin^2 x}{\cos x} - \cos x = 1 + 2\sin^2 x \quad \Leftrightarrow \dfrac{2\sin^2 x}{\cos x} - 2\sin^2 x = 1 + \cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(\dfrac{1}{\cos x} - 1\right) = 1 + \cos x \quad \Leftrightarrow 2(1-\cos^2 x)(1-\cos x) = (1+\cos x)\cos x$

$\Leftrightarrow \left(1+\cos x\right)\left[2(1-\cos x)^2 - \cos x\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right., \left(k \in \text{¢}\right)$

So với điều kiện nghiệm phương trình $x = \pi + k\pi, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, \left(k \in \text{¢}\right)$

6). $5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\tan^2 x \ \ (1)$

Điều kiện : $\cos x \neq 0$

$(1) \Leftrightarrow 5\sin x - 2 = \dfrac{3\sin^2 x}{1-\sin^2 x}(1-\sin x) \Leftrightarrow (5\sin x - 2)(1+\sin x) = 3\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2}$ hoặc $\sin x = -2$ (loại)

Với $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, \left(k \in \text{¢}\right)$

So với điều kiện nghiệm phương trình $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, \ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, \left(k \in \text{¢}\right)$

6). $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - 3\tan^2 x = \dfrac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x} \ \ (1)$

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, \left(k \in \text{¢}\right)$

$(1) \Leftrightarrow -\cot x - 3\tan^2 x = -\dfrac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\tan x} + \tan^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \tan^3 x = -1 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in ¢)$.

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in ¢)$

$$\boxed{7).\ \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 \ (1)}$$

Ta có $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

$(1) \Leftrightarrow \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$

Điều kiện : $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow \cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x = 2\sin x(1 + \cos x) \quad \Leftrightarrow \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 2\sin x(1 + \cos x)$

$\Leftrightarrow \cos x + 1 = 2\sin x(1 + \cos x)$

$\Leftrightarrow (1 + \cos x)(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 0$ hoặc $1 - 2\sin x = 0$

Với $1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1$ (so với điều kiện loại).

Với $1 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in ¢)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in ¢)$

$$\boxed{8).\ \cot x + \sin x\left(1 + \tan x \tan\frac{x}{2}\right) = 4 \ (1)}$$

Điều kiện : $\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos\frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$. Ta có : $1 + \tan x.\tan\frac{x}{2} = \frac{1}{\cos x}$

$(1) \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 4 \quad \Leftrightarrow 2\sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, (k \in ¢)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \ (k \in ¢)$

$$\boxed{9).\ \sin 2x + \sin x - \frac{1}{2\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = 2\cot 2x \ (1)}$$

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$

(1) $\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x \sin x - \cos x - 1 = 2\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x - 1 + \cos x(2\sin^2 x - 1) = 2\cos 2x \Leftrightarrow -\cos^2 2x + \cos 2x.\cos x - 2\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x + \cos x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow \cos 2x(2\cos^2 x + \cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$ hoặc $2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$

Với $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Với $2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$ phương trình vô nghiệm.

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{10).\ \frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \tan x - \cot x \ (1)}$$

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\cos 2x.\cos x + \sin 2x.\sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}$$

$\Leftrightarrow \cos x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = -1$

Với $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Với $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. So với điều kiện nghiệm này loại.

Kết luận nghiệm của phương trình $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$\boxed{11).\ (1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x \ (1)}$$

Điều kiện : $\cos x \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\cos x}.(\sin x + \cos x)^2 = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^2 = \cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)\big((\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - 1\big) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \vee \cos 2x - 1 = 0$

Với $\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \left(k \in ¢\right)$

Với $\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in ¢)$

Kết luận nghiệm của phương trình $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ x = k\pi, (k \in ¢)$