Giải các phương trình sau:

1). $\dfrac{\cos x}{\cos 3x}-\dfrac{\cos 5x}{\cos x}=8\sin x\sin 3x$

2). $\sin 4x+3\sin 2x=\tan 2x$

3). $\cos 5x.\cos x=\cos 4x.\cos 2x+3\cos^2 x+1$

4). $3\left(\tan x+\cot x\right)=2\left(2+\sin 2x\right)$

5). $\dfrac{1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x}{2\sin x\cos x-1}=1$

6). $\dfrac{1}{\tan x+\cot 2x}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos x-\sin x\right)}{\cot x-1}$

7). $\dfrac{1}{1-\tan^2 x}=\dfrac{\sin^2 x+1}{\cos 2x}+\sqrt{3}\tan 2x$

9). $2\cos^3 x+2\sin^3 x+2\sin^2 x\cos x+2\cos^2 x\sin x-\sqrt{2}=0$

10). $\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\sqrt{3}$

LỜI GIẢI

1). $\dfrac{\cos x}{\cos 3x}-\dfrac{\cos 5x}{\cos x}=8\sin x\sin 3x$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases}\cos 3x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow\cos^2 x-\cos 3x.\cos 5x=8\sin x.\sin 3x.\cos 3x.\cos x$

$\Leftrightarrow\cos^2 x-\cos 3x.\cos 5x=2\sin 2x.\sin 6x$

$\Leftrightarrow\dfrac{1+\cos 2x}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 8x\right)=\cos 4x-\cos 8x$

$\Leftrightarrow 1+\cos 2x-\cos 2x-\cos 8x=2\cos 4x-2\cos 8x$

$\Leftrightarrow 1+\cos 8x-2\cos 4x=0\Leftrightarrow 2\cos^2 4x-2\cos 4x=0\Leftrightarrow 2\cos 4x\left(\cos 4x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\cos 4x=0$ hoặc $\cos 4x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}$ hoặc $x=\dfrac{k\pi}{2},\left(k\in ¢\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, x = \frac{k\pi}{2}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

2). $\sin 4x + 3\sin 2x = 2\tan 2x \ (1)$

Điều kiện: $\cos 2x \ne 0 \Leftrightarrow 2x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

$\left(1\right) \Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x + 3\sin 2x = 2.\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos^2 2x + 3\sin 2x\cos 2x = 2\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x\left(2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0$ hoặc $2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0$

Với $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Với $2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \vee \cos 2x = -2$ (loai).

$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{k\pi}{2}, \ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

3). $\cos 5x.\cos x = \cos 4x.\cos 2x + 3\cos^2 x + 1 \ (1)$

$\left(1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos 4x + \cos 6x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos 6x\right) + 3.\frac{1 + \cos 2x}{2} + 1$

$\Leftrightarrow \cos 4x + \cos 6x = \cos 2x + \cos 6x + 3\left(1 + \cos 2x\right) + 2$

$\Leftrightarrow \cos 4x = 4\cos 2x + 5 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 = 4\cos 2x + 5$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x - 2\cos 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 3$ (vô nghiệm) hoặc $\cos 2x = -1$

Với $\cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

4). $3\left(\tan x + \cot x\right) = 2\left(2 + \sin 2x\right) \ (1)$

$\left(1\right) \Leftrightarrow 3\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = 2\left(2 + \sin 2x\right)$

$\Leftrightarrow 3\frac{1}{\sin x.\cos x} = 2\left(2 + \sin 2x\right) \quad \Leftrightarrow \frac{6}{\sin 2x} = 2\left(2 + \sin 2x\right)$

Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \quad \vee \quad \sin 2x = -3$ (vô nghiệm).

Với $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

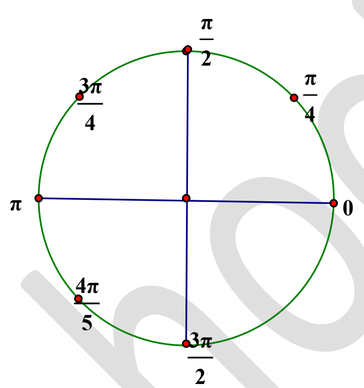
5). $\dfrac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x\cos x - 1} = 1\ (1)$

Điều kiện: $2\sin x\cos x \neq 1 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

$(1) \Leftrightarrow 1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x = \sin 2x - 1 \Leftrightarrow 2 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2}$ (vô ngiệm) hoặc $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Với $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.,\left(k \in \mathbb{Z}\right)$



Biểu diễn nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, có hai đầu mút là $\frac{\pi}{4}$ và $\frac{5\pi}{4}$.

Biểu diễn nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$, có một đầu mút $\frac{\pi}{4}$. Vậy so với điều kiện nghiệm này loại

Biểu diễn nghiệm $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$, có một đầu mút $\frac{3\pi}{4}$ không trùng với 2 đầu mút $\frac{\pi}{4}$ và $\frac{5\pi}{4}$. Vậy nghiệm này nhân.

Kết luận nghiệm của phương trình $x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi, \left(k \in ¢\right)$

6). $\dfrac{1}{\tan x + \cot 2x} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\cos x - \sin x\right)}{\cot x - 1} \quad (1)$

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \cot x \neq 1 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos x - \sin x\right)}{\dfrac{\cos x}{\sin x} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x.\sin 2x}{\sin 2x \sin x + \cos 2x \cos x} = \frac{\sqrt{2}\sin x\left(\cos x - \sin x\right)}{\cos x - \sin x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin x \cos^2 x}{\cos x} = \sqrt{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \quad \left(k \in ¢\right)$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \quad \left(k \in ¢\right)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \quad \left(k \in ¢\right)$

7). $\dfrac{1}{1 - \tan^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + 1}{\cos 2x} + \sqrt{3}\tan 2x \ (1)$

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ 1 - \tan^2 x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin^2 x - 1}{\cos 2x} + \frac{\sqrt{3}\sin 2x}{\cos 2x} \quad \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + 1}{\cos 2x} + \frac{\sqrt{3}\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos 2x} = \frac{\sin^2 + 1}{\cos 2x} + \frac{\sqrt{3}\sin 2x}{\cos 2x} \qquad \Leftrightarrow \cos^2 x = \sin^2 x + 1 + \sqrt{3}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 \qquad \Leftrightarrow \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \cos 2x.\cos\frac{\pi}{3} - \sin 2x.\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ hoặc $x=k\pi,\left(k\in ¢\right)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{3}+k\pi, x=k\pi,\left(k\in ¢\right)$

9). $2\cos^3 x+2\sin^3 x+2\sin^2 x\cos x+2\cos^2 x\sin x-\sqrt{2}=0 \quad (1)$

$(1)\Leftrightarrow 2\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)+2\sin x\cos x\left(\cos x+\sin x\right)-\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\sin x+\cos x\right)\left(1-\sin x\cos x\right)+2\sin x\cos x\left(\cos x+\sin x\right)-\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\sin x+\cos x\right)\left[\left(1-\sin x\cos x\right)+\sin x\cos x\right]-\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\sin x+\cos x\right)=\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi, x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$

10). $\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\sqrt{3} \quad (1)$

$(1)\Leftrightarrow \frac{\sin 3x+\sin x+\sin 2x}{\cos 3x+\cos x+\cos 2x}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{2\sin 2x.\cos 3x+\sin 2x}{2\cos 2x.\cos x+\cos 2x}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x\left(2\cos x+1\right)}{\cos 2x\left(2\cos x+1\right)}=\sqrt{3} \quad (*)$. Điều kiện: $\begin{cases}\cos 2x\neq 0\\ 2\cos x-1\neq 0\end{cases}$

$(*)\Leftrightarrow \tan 2x=\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \quad \left(k\in ¢\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \quad \left(k\in ¢\right)$

11). $\tan^2 x=\frac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x} \quad (1)$

$(1)\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x} \Leftrightarrow \frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}=\frac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$

Điều kiện: $\sin^2 x\neq 1 \Leftrightarrow \sin x\neq \pm 1$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)}$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)(1+\cos x)(1+\sin x+\sin^2 x) = (1-\cos x)(1+\sin x)(1+\cos x+\cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)\left[(1+\cos x)(1+\sin x+\sin^2 x)-(1+\sin x)(1+\cos x+\cos^2 x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)(\sin^2 x+\sin^2 x\cos x-\cos^2 x-\sin x\cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)\left[(\sin^2 x-\cos^2 x)+(\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)\left[(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x(\sin x-\cos x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x+\sin x\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos x = 0 \ (1) \vee \sin x-\cos x = 0 \ (2) \vee \sin x+\cos x+\sin x\cos x = 0 \ (3)$$

- Giải (1): $1-\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$
- Giải (2): $\sin x-\cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+k\pi, (k \in \text{¢})$
- Giải (3): $\sin x+\cos x+\sin x\cos x = 0$. Đặt $t = \sin x+\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$.

$(3) \Leftrightarrow t+\frac{t^2-1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2+2t-1 = 0 \Leftrightarrow t = -1+\sqrt{2} \vee t = -1-\sqrt{2}$, so với điều kiện nhận $t = -1+\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sin x+\cos x = -1+\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4} = \pi-\arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi \end{array}\right., (k \in \text{¢})$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = k2\pi$, $x = \frac{\pi}{4}+k\pi$,

$x = -\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi$, $x = \frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi, (k \in \text{¢})$.