

$$3). \sin 3x(\cos x - 2 \sin 3x) + \cos 3x(1 + \sin x - 2 \cos 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x) - 2(\sin^2 3x + \cos^2 3x) + \cos 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x - 2 + \cos 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \cos 3x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 3x = m2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{m2\pi}{3} \end{cases}, (k, m \in \mathbb{Z})$$

Nếu phương trình có nghiệm thì tồn tại các giá trị k, m sao cho :

$$\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} = \frac{m2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{k}{2} - \frac{2m}{3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{3k+4m}{6} = \frac{1}{8} = 12k+16m = 3$$

$\Leftrightarrow 2(6k+8m) = 3$ (không thỏa). Phương trình vô nghiệm vì: Vế trái là một số chẵn, còn vế phải là một số lẻ.

Kết luận phương trình vô nghiệm.

$$4). \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - \sqrt{3} \sin x - \cos x + 4 = 0. \text{ Chia 2 vế cho 2 ta được :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = -1 \\ \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + l2\pi \end{cases}. \text{ Phương trình có nghiệm khi :}$$

$\frac{\pi}{12} + k\pi = -\frac{\pi}{3} + l2\pi \Leftrightarrow 1 + 12k = -4 + 24l \Leftrightarrow 12k - 24l = -5$. Vô nghiệm với mọi $k, l \in \mathbb{Z}$ vì VT là một số chẵn, còn VP là một số lẻ.

$$5). \cos 2x = \cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}. \text{ Điều kiện : } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \geq -1 \end{cases} (*).$$

Đặt $t = \tan x$, điều kiện $t \geq 0$

Khi đó phương trình trở thành :

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} \sqrt{1+t} \Leftrightarrow 1-t^2 = \sqrt{1+t}, \text{ điều kiện } 1-t^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1.$$

$$\Leftrightarrow (1-t^2)^2 = 1+t \Leftrightarrow (1+t) \left[(1+t)(1-t)^2 - 1 \right] = 0.$$

$$\Leftrightarrow (1+t)(1-t)^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^3 - t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

So với điều kiện nhận $t = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

6). $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x)$ Ta có nhận xét sau :

Bất đẳng thức Bunhiacopxki: $|\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x}| \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(\cos^2 3x + (\sqrt{2 - \cos^2 3x})^2)}$

$$\Leftrightarrow |\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x}| \leq 2$$

Suy ra vế trái đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $\cos 3x = \sqrt{2 - \cos^2 3x}$

$$VP = 2(1 + \sin^2 2x) \geq 2$$

Vậy chỉ xảy ra khi : $\begin{cases} \cos 3x = \sqrt{2 - \cos^2 3x} \\ \sin^2 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 3x = 1 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 6x = -1 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{l\pi}{2} \end{cases}.$

Nếu phương trình có nghiệm thì tồn tại k, l thuộc \mathbb{Z} sao cho :

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} = \frac{l\pi}{2} \Leftrightarrow -1 + 2k = 3l \Leftrightarrow k = \frac{3l+1}{2} = 1 + \frac{l+1}{2}.$$

Để k là nguyên thì ta chọn : $l+1 = 2n \Rightarrow l = 2n-1$.

Thay vào (2) nghiệm : $x = \frac{(2n+1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

7). $\sin^{1996} x + \cos^{1996} x = 1$

$$\sin^{1996} x + \cos^{1996} x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^{1996} x - \sin^2 x = \cos^2 x - \cos^{1996} x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (\sin^{1994} x - 1) = \cos^2 x (1 - \cos^{1994} x) \quad (2)$$

Ta thấy $\begin{cases} \sin^2 x \geq 0 \\ \sin^{1994} x - 1 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x (\sin^{1994} x - 1) \leq 0, \forall x$

Ngoài ra có $\begin{cases} \cos^2 x \geq 0 \\ 1 - \cos^{1994} x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \cos^2 x (1 - \cos^{1994} x) \geq 0, \forall x.$

$$\text{Do đó (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x (\sin^{1994} x - 1) = 0 \\ \cos^2 x (1 - \cos^{1994} x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \\ \cos x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x = n\pi \end{cases}, (m, n \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

hoc360.net