2. Với n là số nguyên dương, hãy chứng minh các hệ thức sau:

a. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

b. $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + ... + C_{2n}^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n}$

LỜI GIẢI

a. Ta có: $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n$ (1)

Chọn $x = 1$ thay vào (1) ta được: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$ (đpcm)

b. Ta có: $(1 - x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 - C_{2n}^3x^3 + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}$ (2)

Chọn $x = 1$ thay vào (2), ta được: $C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n} = 0$

$\Leftrightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1}$ (đpcm).

3. Chứng minh rằng:

$$C_{2001}^0 + 3^2C_{2001}^2 + 3^4C_{2001}^4 + ... + 3^{2000}C_{2001}^{2000} = 2^{2000}(2^{2001} - 1)$$

LỜI GIẢI

Ta có: $(1+x)^{2001} = C_{2001}^0 + C_{2001}^1x + C_{2001}^2x^2 + \cdots + C_{2001}^{2000}x^{2000} + C_{2001}^{2001}x^{2001}$ (1).

Thay $x = 3$ vào hai vế của (1):

$4^{2001} = C_{2001}^0 + 3C_{2001}^1 + 3^2C_{2001}^2 + ...3^{200}C_{2001}^{2000} + 3^{2001}C_{2001}^{2001}$ (*).

Thay $x = -3$ vào hai vế của (1):

$(-2)^{2001} = C_{2001}^0 - 3C_{2001}^1 + 3^2C_{2001}^2 + ... + 3^{200}C_{2001}^{2000} - 3^{2001}C_{2001}^{2001}$ (**).

Lấy (*) + (**), ta được:

$4^{2001} - 2^{2001} = 2\left(C_{2001}^0 + 3^2C_{2001}^2 + 3^4C_{2001}^4 + ... + 3^{2000}C_{2001}^{2000}\right)$

$\Leftrightarrow C_{2001}^0 + 3^2C_{2001}^2 + 3^4C_{2001}^4 + ... + 3^{2000}C_{2001}^{2000} = 2^{2000}(2^{2001} - 1)$ (đpcm).

6. Chứng minh: $C_n^0 3^n - C_n^1 3^{n-1} + ... + (-1)^n C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$

LỜI GIẢI

Theo khai triển nhị thức Newton ta có: $(a + b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + ... + C_n^nb^n$ (*)

- Với $a = 3, b = -1$ thay vào (*) được:

  $C_n^0 3^n - C_n^1 3^{n-1} + ... + (-1)^n C_n^n = (3-1)^n = 2^n$ (1)

- Với $a = 1, b = 1$ thay vào (*) được:

  $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $C_n^0 3^n - C_n^1 3^{n-1} + ... + (-1)^n C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$

8. Với n, k là các số nguyên dương và $1 \le k \le n$, chứng minh rằng

$$C_n^0.C_n^k - C_n^1.C_{n-1}^{k-1} + C_n^2.C_{n-2}^{k-2} - ... + (-1)^k.C_n^k.C_{n-k}^0 = 0.$$

LỜI GIẢI

Với mọi x và k là số nguyên dương , ta có

$$\left(1+x\right)^k = C_k^0 + C_k^1.x + C_k^2.x^2 + ... + C_k^k.x^k.$$

$$\Leftrightarrow C_n^k\left(1+x\right)^k = C_k^0.C_n^k + C_k^1.C_n^k.x + C_k^2.C_n^k.x^2 + ... + C_k^k.C_n^k.x^k \textbf{ (1)}$$

Ta có

$$C_k^m C_n^k = \frac{k!}{m!\left(k-m\right)!}.\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!} = \frac{n!}{m!\left(n-m\right)!}.\frac{\left(n-m\right)!}{\left(k-m\right)!\left(n-k\right)!} = C_n^m C_{n-m}^{k-m}$$

Do đó **(1)** có dạng:

$$C_n^k\left(1+x\right)^k = C_n^0.C_n^k + C_n^1.C_{n-1}^{k-1}.x + C_n^2.C_{n-2}^{k-2}.x^2 + ... + C_n^k.C_{n-k}^0.x^k \textbf{ (2)}$$

Thay $x=-1$ vào **(2)**, ta được:

$$0 = C_n^0.C_n^k - C_n^1.C_{n-1}^{k-1} + C_n^2.C_{n-2}^{k-2} - ... + \left(-1\right)^k.C_n^k.C_{n-k}^0 = 0, \text{ đpcm.}$$

15. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

$$C_n^0 + C_n^2 + ... = C_n^1 + C_n^3 + ... = 2^{n-1},$$

LỜI GIẢI

Ta có

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^k + ... (1)$$

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^k C_n^k + ... (2).$$

Suy ra:

$(1)+(2)$ ta được $2^n = 2\left(C_n^0 + C_n^2 + ...\right) \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^2 + ... = 2^{n-1}.$

$(1)-(2)$ ta được $2^n = 2\left(C_n^1 + C_n^3 + ...\right) \Leftrightarrow C_n^1 + C_n^3 + ... = 2^{n-1}.$

TÌM n DỰA VÀO NHỊ THỨC NIUTƠN

3. Tìm số nguyên dương $n>4$, biết rằng

$$2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \cdots + \left(3n+2\right)C_n^n = 1600$$

LỜI GIẢI

Xét số hạng tổng quát

$$\left(3k+2\right)C_n^k = 3k.C_n^k + 2.C_n^k = 3.k.\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!} + 2.C_n^k$$

$$= 3.n\frac{\left(n-1\right)!}{\left(k-1\right)!\left(n-1-(k-1)\right)!} + 2.C_n^k = 3nC_{n-1}^{k-1} + 2.C_n^k$$

Giả thuyết $\Leftrightarrow 3n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \cdots + C_{n-1}^{n-1}\right) + 2\left(C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n\right) = 1600$

$\Leftrightarrow 3n\left(1+1\right)^{n-1} + 2\left(1+1\right)^n = 1600 \Leftrightarrow 3n.2^{n-1} + 2.2^n = 1600 \Leftrightarrow 2^{n-1}\left(3n+4\right) = 1600$ Chia hai vế cho 16 ta được :

$$2^{n-5}\left(3n+4\right) = 100 \Leftrightarrow 2^{n-5}\left(3n+4\right) = 2^2.25 \Leftrightarrow \begin{cases} n-7=2 \\ 3n+4=25 \end{cases} \Leftrightarrow n=7$$

7. Cho khai triển nhị thức:

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}}+2^{\frac{-x}{3}}\right)^n=C_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n+C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)+\cdots+C_n^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n-1}+C_n^n\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^n$$

(n là số nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3=5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng 20n. Tìm n và x.

LỜI GIẢI

Từ $C_n^3=5C_n^1$ ta có $n\geq 3$ và $\frac{n!}{3!(n-3)!}=5\frac{n!}{(n-1)!}\Leftrightarrow\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=5n\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2-3n-28=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=-4\\n=7\end{array}\right.$. Chọn $n=7$.

Ta có số hạng thứ tư ứng với $k=3$. Theo đề bài có: $C_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^3=140$

$\Leftrightarrow 35.2^{2x-2}.2^{-x}=140\Leftrightarrow 2^{x-2}=4\Leftrightarrow x-2=2\Leftrightarrow x=4$.

Kết luận $n=7$ và $x=4$.

8. Tìm số nguyên dương n sao cho: $C_n^0+2C_n^1+4C_n^2+...+2^nC_n^n=243$

LỜI GIẢI

Ta có: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$ (1).

Thay $x=1$ vào hai vế của (1) ta được: $3^n=C_n^0+2C_n^1+4C_n^2+...+2^nC_n^n$

Theo đề bài có $3^n=243\Leftrightarrow n=5$

9. Giả sử n là số nguyên dương và:

$(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k+\ldots+a_nx^n$

Biết rằng tồn tại số k nguyên $(1\leq k\leq n-1)$ sao cho $\frac{a_{k-1}}{2}=\frac{a_k}{9}=\frac{a_{k+1}}{24}$. Hãy tìm n.

LỜI GIẢI

Ta có: $\frac{a_{k-1}}{2}=\frac{a_k}{9}=\frac{a_{k+1}}{24}$ (1) $(1\leq k\leq n-1)$ $\Leftrightarrow\frac{C_n^{k-1}}{2}=\frac{C_n^k}{9}=\frac{C_n^{k+1}}{24}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=\frac{1}{9}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1}{24}\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

$\Leftrightarrow 2.(k-1)!(n-k+1)!=9.k!(n-k)!=24.(k+1)!(n-k-1)!$

$\Leftrightarrow 2.(n-k+1)(n-k)=9.k(n-k)=24.(k+1)k$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2(n-k+1)=9k\\9(n-k)=24(k+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{2n+2}{11}\\k=\frac{3n-8}{11}\end{cases}$

Để tồn tại k thoả mãn hệ thức (1), điều kiện ắt có và đủ là:

$$\frac{2n+2}{11}=\frac{3n-8}{11}\Leftrightarrow n=10$$

10. Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $\left(x^2+1\right)^n\left(x+2\right)^n$. Tìm n để $a_{3n-3}=26n$.

LỜI GIẢI

Ta có $\left(x^2+1\right)^n\left(x+2\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(x^2\right)^k\sum_{m=0}^{n}C_n^m2^{n-m}.x^m=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}C_n^kC_n^m.2^{n-m}.x^{2k+m}$

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}2k+m=3n-3\\0\le k,m\le n;\ k,m\in\mathbb{N}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=n\\m=n-3\end{cases}\vee\begin{cases}k=n-1\\m=n-1\end{cases}$

Vậy hệ số của x^{3n-3} là: $a_{3n-3}=C_n^nC_n^{n-3}2^3+C_n^{n-1}C_n^{n-1}2^1$

Theo đề bài ta có:

$$C_n^nC_n^{n-3}2^3+C_n^{n-1}C_n^{n-1}2^1=26n\ \Leftrightarrow 8.\frac{n!}{(n-3)!3!}+2.\left(\frac{n!}{(n-1)!}\right)^2=26n$$

$$\Leftrightarrow\frac{4n(n-1)(n-2)}{3}+2n^2=26n\ \Leftrightarrow\begin{cases}4n^2-6n-70=0\\n\ge3,n\in\mathbb{N}\end{cases}\Leftrightarrow n=5$$

13. Tìm số tự nhiên n thoả mãn đẳng thức sau:

$$C_{2n}^0+C_{2n}^23^2+...+C_{2n}^{2k}3^{2k}+...+C_{2n}^{2n-2}3^{2n-2}+C_{2n}^{2n}3^{2n}=2^{15}(2^{16}+1)$$

LỜI GIẢI

Ta có: $4^{2n}=\left(1+3\right)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^13^1+C_{2n}^23^2+...+C_{2n}^{2n-1}3^{2n-1}+C_{2n}^{2n}3^{2n}\ (1)$

$2^{2n}=\left(1-3\right)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^13^1+C_{2n}^23^2-...-C_{2n}^{2n-1}3^{2n-1}+C_{2n}^{2n}3^{2n}\ (2)$

Lấy $(1)+(2)\Leftrightarrow4^{2n}+2^{2n}=2\left(C_{2n}^0+C_{2n}^23^2+...+C_{2n}^{2n}3^{2n}\right)$

$$\Rightarrow C_{2n}^0+C_{2n}^23^2+...+C_{2n}^{2n}3^{2n}=\frac{4^{2n}+2^{2n}}{2}$$

Theo đề bài có: $2.2^{15}\left(2^{16}+1\right)=4^{2n}+2^{2n}\Leftrightarrow\left(2^{16}\right)^2+2^{16}=\left(2^{2n}\right)^2+2^{2n}$

$\Leftrightarrow\left[\left(2^{16}\right)^2-\left(2^{2n}\right)^2\right]+\left(2^{16}-2^{2n}\right)=0\Leftrightarrow\left(2^{16}-2^{2n}\right)\left(2^{16}+2^{2n}\right)+\left(2^{16}-2^{2n}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(2^{16}-2^{2n}\right)\left(2^{16}+2^{2n}+1\right)=0\Leftrightarrow\left(2^{16}-2^{2n}\right)=0$ (vì $2^{16}+2^{2n}+1>0\ \forall n$)

$2n=16\Leftrightarrow n=8$

14. Tính giá trị của biểu thức: $M=\dfrac{A_{n+1}^4+3A_n^3}{(n+1)!}$.

Biết $C_{n+1}^2+2C_{n+2}^2+2C_{n+3}^2+C_{n+4}^2=149$.

LỜI GIẢI

Điều kiện: $n\ge3$.

Ta có: $C_{n+1}^2+2C_{n+2}^2+2C_{n+3}^2+C_{n+4}^2=149$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}+2\frac{(n+2)!}{2!n!}+2\frac{(n+3)!}{2!(n+1)!}+\frac{(n+4)!}{2!(n+2)!}=149$$

$$\frac{(n+1)n}{2}+\frac{2(n+2)(n+1)}{2}+\frac{2(n+3)(n+2)}{2}+\frac{(n+4)(n+3)}{2}=149$$

$$\Leftrightarrow n^2+4n-45=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=5 \\ n=-9 \end{array}\right.$. So với điều kiện nhận n = 5.

Vậy: $M=\frac{A_{n+1}^4+3A_n^3}{(n+1)!}=\frac{A_6^4+3A_5^3}{6!}=\frac{3}{4}$

15. Tìm $n \in N$ sao cho: $C_{4n+2}^0+C_{4n+2}^2+C_{4n+2}^4+...+C_{4n+2}^{2n}=256$

LỜI GIẢI

Ta có: $C_{4n+2}^0+C_{4n+2}^1+C_{4n+2}^2+...+C_{4n+2}^{4n+2}=2^{4n+2}$

$C_{4n+2}^0+C_{4n+2}^2+C_{4n+2}^4+...+C_{4n+2}^{4n+2}=2^{4n+1}$

$C_{4n+2}^0+C_{4n+2}^2+C_{4n+2}^4+...+C_{4n+2}^{2n}=2^{4n}$

Vậy có: $2^{4n}=256 \Leftrightarrow n=2$

16. Với $n \in ¥, n \geq 3$. Tìm n thỏa $\frac{1}{C_3^3}+\frac{1}{C_4^3}+\frac{1}{C_5^3}+...+\frac{1}{C_n^3}=\frac{89}{30}$

LỜI GIẢI

Ta có $C_k^3=\frac{k!}{3!(k-3)!}=\frac{k(k-1)(k-2)}{6} \Rightarrow \frac{1}{C_k^3}=\frac{6}{k(k-1)(k-2)} (k \geq 3)$

Ta lại có $\frac{1}{(k-1)(k-2)}-\frac{1}{k(k-1)}=\frac{2}{k(k-1)(k-2)}$

Đặt $f(k)=\frac{1}{(k-1)(k-2)} \Rightarrow \frac{1}{C_k^3}=3\left[f(k)-f(k+1)\right]$.

Cho k chạy từ 3 đến n ta được:

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{C_k^3}=3\left[f(3)-f(4)+(4)-f(5)+\cdots-f(n)+f(n)-f(n+1)\right]$$

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{C_k^3}=3\left[f(3)-f(n+1)\right]=3\left(1-\frac{1}{n(n-1)}\right)=\frac{3(n^2-n-1)}{n^2-n}$$

Hay $\frac{1}{C_3^3}+\frac{1}{C_4^3}+\frac{1}{C_5^3}+...+\frac{1}{C_n^3}=\frac{3(n^2-n-1)}{n^2-n} \Leftrightarrow \frac{3(n^2-n-1)}{n^2-n}=\frac{89}{30}$

$\Leftrightarrow n^2-n-90=0 \Leftrightarrow n=10$