DẠNG 3: Thêm bớt số hạng hoặc một biểu thức vắng để khử được dạng vô định: Các dạng hay gặp $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[k]{f(x)}+\sqrt[k]{g(x)}+c}{x-x_0}$ **hoặc** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[k]{f(x)}+\sqrt[m]{g(x)}+c}{x-x_0}$ **hoặc** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[k]{f(x)}+\sqrt[m]{g(x)}+c}{(x-x_0)^n}$ **. Trong đó k, m, n** $\in$ ¥ * **và** $n\le\min(k,m)$ **.**

PHƯƠNG PHÁP: Thông qua những ví dụ sau, rồi ta rút ra phương pháp giải:

Ví dụ 1: Tìm các giới hạn sau :

a). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}+\sqrt{5x+4}-5}{x-1}$ b). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{5x-6}}{x-2}$

c). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-4}$ d). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-1}+3\sqrt{x^2+x-1}-5\sqrt{2x^2-1}}{x-1}$

LỜI GIẢI

a). Ta có khi $x\to 1$ thì $\left(\sqrt{2x+2}+\sqrt{5x+4}-5\right)\to 0$ do đó đây là bài dạng vô định $\dfrac{0}{0}$, ta phải tách được về dạng $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{f(x)}-c}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{g(x)}-m}{x-1}$ sao cho mỗi giới hạn nhân lượng liên hợp đều khử được dạng vô định . Kỹ thuật ta thay $x=1$ vào $\sqrt{2x+2}=2$ và $\sqrt{5x+4}=3$ nên số (-5) tách thành $(-2)+(-3)$ và gom lại như sau :

$$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+2}+\sqrt{5x+4}-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2x+2}-2\right)+\left(\sqrt{5x+4}-3\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x+4}-3}{x-1}$$

. Sau đó tính từng giới hạn.

● Tính $L_1=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{2x+2}-2\right)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{2x+2}\right)^2-4}{(x-1)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{\sqrt{2x+2}+2}=\dfrac{1}{2}$.

● Tính $L_2=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{5x+4}-3\right)\left(\sqrt{5x+4}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{5x+4}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{5x+4}\right)^2-9}{(x-1)\left(\sqrt{5x+4}+3\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x+4}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{\sqrt{5x+4}+3}=\dfrac{5}{6}$.

Kết luận $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}+\sqrt{5x+4}-5}{x-1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{4}{3}$.

b). $L=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{5x-6}}{x-2}$. Ta dễ dàng thấy đây là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ và tử số có hai căn thức khác loại, nên ta phải thêm bớt một hằng số c sao cho đưa được về dạng $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{f(x)}-c}{x-2}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{c-\sqrt{g(x)}}{x-2}$ và mỗi giới hạn đều tính được giới hạn khi khử được dạng vô định bằng phương pháp nhân lượng liên hợp.

Kỹ thuật 1: Thay $x=2$ vào $\sqrt[3]{3x+2}$ và $\sqrt{5x-6}$ đều bằng 2. Suy ra 2 là giá trị ta cần thêm bớt.

Kỹ thuật 2: Cho $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ sau đó giải hệ $\begin{cases}\sqrt[3]{3x+2}=2\\ \sqrt{5x-6}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2=8\\ 5x-6=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ x=2\end{cases} \Rightarrow c=2$ là giá trị cần thêm bớt.

Cụ thể làm như sau: $L=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{5x-6}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{3x+2}-2\right)+\left(2-\sqrt{5x-6}\right)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}+\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{5x-6}}{x-2}$.

Tính $L_1=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{3x+2}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2.\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}{(x-2)\underbrace{\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2.\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}_{A}}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3(x-2)}{(x-2).A}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{A}=\dfrac{1}{4}$.

Tính $L_2=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{5x-6}}{x-2}=\dfrac{\left(2-\sqrt{5x-6}\right)\left(2+\sqrt{5x-6}\right)}{(x-2)\left(2+\sqrt{5x-6}\right)}=\dfrac{4-(5x-6)}{(x-2)\left(2+\sqrt{5x-6}\right)}$

$=\dfrac{-5(x-2)}{(x-2)\left(2+\sqrt{5x-6}\right)}=\dfrac{-5}{2+\sqrt{5x-6}}=-\dfrac{5}{4}$.

Do đó $L=L_1+L_2=\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{4}=-1$.

c). $L=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-4}$, tương tự câu b) thay $x=2$ vào $\sqrt[3]{2x^2+4x+11}$ và $\sqrt{x+7}$ đều bằng 3.

Như vậy 3 là giá trị cần thêm và bớt, cụ thể $L=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{2x^2+4x+11}-3\right)+\left(3-\sqrt{x+7}\right)}{x^2-4}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11}-3}{x^2-4}+\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{x+7}}{x^2-4}$.

- Tính $L_1=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11}-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{2x^2+4x+11}-3\right)\left[\left(\sqrt[3]{2x^2+4x+11}\right)^2+3.\sqrt[3]{2x^2+4x+11}+9\right]}{\left(x^2-4\right)\underbrace{\left[\left(\sqrt[3]{2x^2+4x+11}\right)^2+3.\sqrt[3]{2x^2+4x+11}+9\right]}_{A}}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{2x^2+4x+11}\right)^3-27}{\left(x^2-4\right).A}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+4x-16}{\left(x^2-4\right).A}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)(x+4)}{(x+2)(x-2).A}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x+4)}{(x+2).A}=\dfrac{1}{9}$.

● Tính: $L_2 = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{x+7}}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(3-\sqrt{x+7}\right)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{\left(x^2-4\right)\left(3+\sqrt{x+7}\right)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{(x-2)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)} = -\dfrac{1}{24}$.

Do đó $L = L_1 + L_2 = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{24} = \dfrac{5}{72}$.

d). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-1}+3\sqrt{x^2+x-1}-5\sqrt{2x^2-1}}{x-1}$. Ta thấy khi $x\to 1$ thì cả tử và mẫu đều $\to 0$ nên đây là bài thuộc dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Kỹ thuật giải bài này cũng giống như các câu a, b, c. Bước đầu tiên thay $x=1$ vào $\sqrt{5x-1}$ được 2, thay $x=1$ vào $\sqrt{x^2+x-1}$ được 1 và thay $x=1$ vào $\sqrt{2x^2-1}$ được 1. Nên giới hạn được viết lại $L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{5x-1}-2\right)+3\left(\sqrt{x^2+x-1}-1\right)-5\left(\sqrt{2x^2-1}-1\right)}{x-1}$

$L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1} + 3\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-1}{x-1} - 5\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x^2-1}-1}{x-1}$.

● Tính $L_1 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{5x-1}-2\right)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+2} = \dfrac{5}{4}$.

● Tính $L_2 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x-1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x-1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x-1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x-1}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x-1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x-1}+1} = \dfrac{3}{2}$.

Tính $L_3 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x^2-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{2x^2-1}-1\right)\left(\sqrt{2x^2-1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x^2-1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-2}{(x-1)\left(\sqrt{2x^2-1}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x^2-1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x+1)}{\sqrt{2x^2-1}+1} = 2$.

Từ đó suy ra $L = L_1 + 3L_2 - 5L_3 = \dfrac{5}{4} + \dfrac{9}{2} - 10 = -\dfrac{17}{4}$.