Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - \frac{3}{2}m^2x^2 + 32$ (với m là tham số). Chứng minh rằng với $m < -2 \vee m > 2$ thì phương trình $f(x) = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 và thỏa điều kiện $x_1 < 0 < x_2 < x_3$.

LỜI GIẢI

Ta có $f(0) = 32$, $f(m^2) = \frac{1}{2}(64 - m^6)$ khi $m < -2 \vee m > 2$ thì $\frac{1}{2}(64 - m^6) < 0$ và $m^2 > 0$.

Mà $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(x^3 - \frac{3}{2}m^2x^2 + 32\right) = -\infty \Rightarrow \exists \alpha < 0$ sao cho $f(\alpha) < 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^3 - \frac{3}{2}m^2x^2 + 32\right) = +\infty \Rightarrow \exists \beta > m^2$ sao cho $f(\beta) > 0$.

Do đó ta có $\begin{cases} f(\alpha).f(0) < 0 \\ f(0).f(m^2) < 0 \\ f(m^2).f(\beta) < 0 \end{cases}$. Vì hàm số f(x) xác định và liên tục trên R nên liên tục trên các đoạn $[\alpha; 0], [0; m^2], [m^2; \beta]$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất ba nghiệm lần lượt thuộc các khoảng $(\alpha; 0), (0; m^2), (m^2; \beta)$. Vì f(x) là hàm bậc ba nên nhiều nhất chỉ có ba nghiệm.

Kết luận với $m < -2 \vee m > 2$ thì phương trình $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}m^2x^2 + 32 = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt thỏa $x_1 < 0 < x_2 < x_3$.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng phương trình $(m^2 - m + 3)x^{2n} - 2x - 4 = 0$ với $n \in \mathbb{N}^*$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x) = (m^2 - m + 3)x^{2n} - 2x - 4$.

Ta có $f(-2) = (m^2 - m + 3)(-2)^{2n} - 2(-2) - 4 = (m^2 - m + 3).2^{2n} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$, $f(0) = -4 < 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Từ đó có $f(-2).f(0) < 0, \forall m \in \mathbb{R}$ (1). Do hàm số xác định và liên tục trên R nên hàm số liên tục trên đoạn $[-2; 0]$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2; 0), \forall m \in \mathbb{R}$.

Kết luận phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị tham số m.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x-2 & x\le 2 \\ ax+b & 2<x<6 \\ x+4 & x\ge 6 \end{cases}$

Với giá trị nào của a, b thì hàm số $f(x)$ liên tục trên R?

LỜI GIẢI

Hàm số đã cho liên tục tại mọi x khác 2 và khác 6. Hàm số đã cho liên tục trên R khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=2$ và $x=6$.

+ Tại $x=2$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2-1=0; \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2a+b; f(2)=0.$

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2a+b=0.$

+ Tại $x=6; \lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=6+4=10; \lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=6a+b; f(6)=10.$

Hàm số liên tục tại $x=6$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=f(6)\Leftrightarrow 6a+b=10.$

Do đó hàm số đã cho liên tục trên R khi và chỉ khi $\begin{cases} 2a+b=0 \\ 6a+b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ b=-5. \end{cases}$

Câu 2: Tìm a, b, c để hàm số sau liên tục trên R: $f(x)=\begin{cases} \sin x & x<-\dfrac{\pi}{2} \\ a\sin x+b & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ 2+\cos x & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

LỜI GIẢI

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{\pi}{2}\right),\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right),\left(\dfrac{\pi}{2};+\infty\right)$. Do đó hàm số liên tục trên R khi và chỉ khi hàm số liên tục tại các điểm $x=-\dfrac{\pi}{2}, x=\dfrac{\pi}{2}.$

+ Tại $x=-\dfrac{\pi}{2}$ ta có $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-a+b;$

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} \sin x=-1;\ \lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} (a\sin x+b)=-a+b.$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=-\dfrac{\pi}{2}$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)} f(x)=f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow -a+b=-1.$

+ Tại $x=\dfrac{\pi}{2}$, ta có $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a+b;$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (2+\cos x)=2; \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (a\sin x+b)=a+b.$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=\dfrac{\pi}{2}$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow a+b=2.$

Do đó hàm đã cho liên tục trên $R \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b=-1 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{2} \\ a=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Câu 3 : Tìm a để các hàm số sau liên tục tại x_0 :

1). $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & x\ne 2 \\ ax+1 & x=2 \end{cases}$ tại $x_0=2$

2). $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3} & x\ne -3 \\ ax+3 & x=-3 \end{cases}$ $x_0=-3$

3). $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & x<0 \\ a+\dfrac{4-x}{x+2} & x\ge 0 \end{cases}$ tại $x_0=0$

4). $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & x<0 \\ a+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2} & x\ge 0 \end{cases}$ tại $x_0=0$

LỜI GIẢI

1). $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & x\ne 2 \\ ax+1 & x=2 \end{cases}$ tại $x_0=2$

Ta có: $f(x_0)=f(2)=2a+1$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(x+\sqrt{x+2})(4x+1-9)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})}=\dfrac{9}{8}$

Để hàm số liên tục tại $x_0=2$ thì $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow \dfrac{9}{8}=2a+1\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{16}$.

2). $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3} & x\ne -3 \\ ax+3 & x=-3 \end{cases}$ $x_0=-3$

Ta có: $f(x_0)=f(-3)=ax+3$

Ta có: $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x^3-3x^2+3x-9)}{(x+3)(x^2+1)}$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-3x^2+3x-9}{x^2+1}=\dfrac{(-3)^3-3.(-3)^2+3.(-3)-9}{(-3)^2+1}=-\dfrac{36}{5}$

Để hàm số liên tục tại $x_0=-3$ thì $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=f(-3) \Leftrightarrow \frac{-36}{5}=-3a+3 \Leftrightarrow a=\frac{17}{5}$.

3). $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & x<0 \\ a+\frac{4-x}{x+2} & x\ge 0 \end{cases}$ tại $x_0=0$.

Có $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-x-1-x}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-2x}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{-2}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}}=\frac{-2}{2}=-1.$

Có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(a+\frac{4-x}{x+2}\right)=a+\frac{4-0}{0+2}=a+2$.

Để hàm số liên tục tại $x_0=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow -1=a+2 \Leftrightarrow a=-3$.

4). $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & x<0 \\ a+\frac{x^3-3x+1}{x+2} & x\ge 0 \end{cases}$ tại $x_0=0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-x-1-x}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-2x}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{-2}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}}=\frac{-2}{2}=-1.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(a+\frac{x^3-3x+1}{x+2}\right)=a+\frac{1}{2}$.

Để hàm số liên tục tại $x_0=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow -1=a+\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}$.