Ví dụ 3 : Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ b). $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

c). $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)...\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ d). $u_n = \frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}$

e). $u_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n(n+1)(n+2)}$ f). $\lim\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$

g). $\lim \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4+4n^3+1}$ h). $\lim\left(\frac{2.1^2+3.2^2+\cdots+(n+1)n^2+n(n+1)^2}{n^4}\right)$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, (\forall k = 1,2,...,n)$. Từ đó

$u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Nên $\lim u_n = \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim 1 - \lim \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$.

b). Ta có $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3k+1)-(3k-2)}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{3k+1}{(3k-2)(3k+1)} - \frac{3k-2}{(3k-2)(3k+1)}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right), (\forall k = 1,2,3...,n)$. Từ đó $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$, có $\lim \frac{1}{3n+1} = 0$. Do đó

$\lim u_n = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$.

c). $\forall k \ge 2$ ta có $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$. Do đó $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)...\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

$= \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \cdot \frac{4.6}{5^2} \cdots \frac{(n-3)(n-1)}{(n-2)^2} \cdot \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$.

Nên $\lim u_n = \lim \frac{n+1}{2n} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$.

d). $u_n = \frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}$.

Ta có dãy số $1+3+5+\cdots+(2n+1)$ là một cấp số cộng với $u_1 = 1$ công sai $d = 3-1 = 2$ và số hạng tổng quát $u_m = 2n+1 \Leftrightarrow u_1 + (m-1)d = 2n+1 \Leftrightarrow 1 + (m-1).2 = 2n+1 \Leftrightarrow m = n+1$, nên tổng của dãy số trên là

$S = \frac{m}{2}(u_1 + u_m) = \frac{n+1}{2}(1+2n+1) = (n+1)^2$. Từ đó $u_n = \frac{(n+1)^2}{3n^2+4} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{3+\frac{4}{n^2}}$ có $\lim \frac{1}{n} = 0$ và $\lim \frac{4}{n^2} = 0$

từ đó suy ra $\lim u_n = \frac{1}{3}$.

e). $u_n = \dfrac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n(n+1)(n+2)}$. Ta có tổng $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (được chứng minh bằng phương pháp quy nạp). Nên $u_n = \dfrac{2n+1}{6(n+2)} = \dfrac{2+\frac{1}{n}}{6\left(1+\frac{2}{n}\right)}$ vì $\lim\dfrac{1}{n} = \lim\dfrac{2}{n} = 0$ do đó $\lim u_n = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

f). Ta có $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \dots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$ (Chứng minh dựa vào nguyên lý quy nạp). Do đó $L = \lim\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \lim\dfrac{1}{4} - \lim\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{4} - 0 = \dfrac{1}{4}$.

g). Ta có $1^3+2^3+\dots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ (chứng minh bằng phương pháp quy nạp). Do đó

$$L = \lim\frac{n^2(n+1)^2}{4(n^4+4n^3+1)} = \lim\frac{n^2\left[n\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^2}{4n^4\left(\frac{n^4+4n^3+1}{n^4}\right)} = \lim\frac{n^4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4n^4\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}$$

$= \lim\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}$. Vì $\lim\dfrac{1}{n} = \lim\dfrac{4}{n} = \lim\dfrac{1}{n^4} = 0$ nên $L = \dfrac{1}{4}$.

h). Ta có $2.1^2+3.2^2+\dots+(n+1)n^2+n(n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Do đó $L = \lim\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^4} = \lim\dfrac{n.n\left(1+\frac{1}{n}\right)n\left(1+\frac{2}{n}\right)n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{4n^4} = \lim\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}{4}$ có $\lim\dfrac{1}{n} = \lim\dfrac{2}{n} = \lim\dfrac{3}{n} = 0$ nên $L = \dfrac{1}{4}$.

DẠNG 5 : TÍNH GIỚI HẠN DỰA VÀO ĐỊNH LÍ KẸP:

PHƯƠNG PHÁP: Dựa vào định lí: Cho ba dãy số $(u_n),(v_n)$ và (w_n). Nếu $u_n \le v_n \le w_n, (\forall n)$ và $\lim u_n = \lim w_n = a, (a \in \mathbb{R})$ thì $\lim v_n = a$.

Ví dụ: Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$ b). $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

c). $u_n = \dfrac{1.3.5.7....(2n-1)}{2.4.6...2n}, (n \in \mathbb{N}^*)$ d). $u_n = \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

LỜI GIẢI

a). Ta có $\dfrac{2k-1}{2k} = \dfrac{2k-1}{\sqrt{4k^2}} \le \dfrac{2k-1}{\sqrt{4k^2-1}} = \sqrt{\dfrac{2k-1}{2k+1}}, (\forall k \in \mathbb{N}^*)$. Từ đó ta có:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} \le \sqrt{\dfrac{1}{3}} \\ \dfrac{3}{4} \le \sqrt{\dfrac{3}{5}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{2n-1}{2n} \le \sqrt{\dfrac{2n-1}{2n+1}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} \le \sqrt{\frac{1}{3}}.\sqrt{\frac{3}{5}}\ldots\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}} \Leftrightarrow u_n \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\ .$$

Do đó $\left|u_n\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}, \forall n$. Mà $\lim \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$ do đó $\lim u_n = 0$.

b). Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} < \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

…………………

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên, vế theo vế ta được $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le u_n < 1, \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$.

Mà $\lim \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \dfrac{n}{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = \lim \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = 1$ và $\lim 1 = 1$. Từ đó suy ra $\lim u_n = 1$.

c). Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ do đó $\left(u_n\right)^2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Có

$$\left(u_n\right)^2 = \frac{1^2.3^2.5^2.7^2....\left(2n-1\right)^2}{2^2.4^2.6^2...(2n)^2} < \frac{1^2.3^2.5^2.7^2....\left(2n-1\right)^2}{\left(2^2-1\right)\left(4^2-1\right)\left(6^2-1\right)...\left[(2n)^2-1\right]}$$

$$= \frac{1^2.3^2.5^2.7^2....\left(2n-1\right)^2}{1.3.3.5.5.7....(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}.$$

Do đó ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $0 < \left(u_n\right)^2 < \dfrac{1}{2n+1}$. Mà $\lim 0 = 0$ và $\lim \dfrac{1}{2n+1} = 0$ nên $\lim \left(u_n\right)^2 = 0$. Từ đó suy ra $\lim u_n = 0$.

d). Dễ dàng chứng minh $\dfrac{3}{2}\sqrt{k} < \left(k+1\right)\sqrt{k+1} - k\sqrt{k} < \dfrac{3}{2}\sqrt{k+1}$.Áp dụng với $k = 1,2,3,...,n$ được :

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n} < \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\left[\left(k+1\right)\sqrt{k+1} - k\sqrt{k}\right] = \frac{2}{3}\left[\left(n+1\right)\sqrt{k+1} - 1\right] \text{ (1) và}$$

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n} > \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[k\sqrt{k} - \left(k-1\right)\sqrt{k-1}\right] > \frac{2}{3}n\sqrt{n} \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{2}{3} < 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n} < \dfrac{2}{3}\dfrac{\left(n+1\right)\sqrt{n+1}-1}{n\sqrt{n}}$. Mà $\lim \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$ và

$\lim \dfrac{2}{3}\dfrac{\left(n+1\right)\sqrt{n+1}-1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{2}{3}$ do đó $\lim\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\right) = \dfrac{2}{3}$.