**Câu 10:** Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

1). Dãy số $(u_n)$ với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$ 2). Dãy số $(u_n)$ với $u_n = 3^n - n$.

3). Dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$. 4). Dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$

5). Dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$ 6). Dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{3^n}{n^2}$

7). Dãy số $(u_n)$: Với $u_n = \dfrac{3n^2-2n+1}{n+1}$ 8). Dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{2n^2+1}$

9). Dãy số $(u_n)$ với $u_n = n - \sqrt{n^2-1}$ 10). Dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n}$

**LỜI GIẢI**

1). Dãy số $(u_n)$ với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$

Với mỗi $n \in N^*$, ta có: $u_{n+1} - u_n = \left[2(n+1)^3 - 5(n+1) + 1\right] - \left(2n^3 - 5n + 1\right)$

$= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 5n - 5 - 1 - 2n^3 + 5n - 1$

$= 6n^2 + 6n - 3 = 6n^2 + 3n + (3n-3) > 0$ ( đúng ) do $n \ge 1$.

Vì thế dãy số $(u_n)$ là một dãy số tăng.

2). Dãy số $(u_n)$ với $u_n = 3^n - n$.

Với mỗi $n \in N^*$, ta có: $u_{n+1} - u_n = \left[3^{n+1} - (n+1)\right] - \left(3^n - n\right)$.

$= 3.3^n - n - 1 - 3^n + n$

$= 2.3^n + 3^n - 3^n - 1 = 2.3^n - 1 > 0$ (đúng) (vì $n \ge 1$.)

Kết luận dãy số $(u_n)$ là một dãy số tăng.

3). Dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

Với mỗi $n \in N^*$, ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{(n+1)(n^2+1) - n\left[(n+1)^2+1\right]}{\left[(n+1)^2+1\right](n^2+1)}$$

$$= \frac{n^3+n+n^2+1-\left(n^3+2n^2+2n\right)}{\left[(n+1)^2+1\right](n^2+1)} = \frac{-n^2-n+1}{\left[(n+1)^2+1\right](n^2+1)} < 0.$$

Vì $-n^2-n+1 < 0 \quad \forall n \ge 1$, và $\left[(n+1)^2+1\right](n^2+1) > 0 \quad \forall n \ge 1$.

Kết luận: dãy số $(u_n)$ là một dãy số giảm.

5). Dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

Dễ thấy $u_n > 0 \quad \forall n \in N^*$. Xét tỉ số: $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$

Ta có: $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}.\dfrac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \quad (\forall n \ge 1)$

Thật vậy: $\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}>1\Leftrightarrow\dfrac{4n}{n+1}>1\Leftrightarrow 4n>n+1\Leftrightarrow 3n>1$ ( đúng $\forall n\ge 1$ )

Kết luận: $(u_n)$ là một dãy số giảm.

6). Dãy số $(u_n)$ với $u_n=\dfrac{3^n}{n^2}$

Dễ thấy $u_n>0\quad \forall n\in N^*$. Xét tỉ số: $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{3^n}{n^2}.\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}.\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

Nếu $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2>1\Leftrightarrow\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2>3$

$$\Leftrightarrow\frac{n+1}{n}>\sqrt{3}\Leftrightarrow n+1>\sqrt{3}.n\Leftrightarrow\sqrt{3}.n-n<1$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}-1\right)n<1\Leftrightarrow n<\frac{1}{\sqrt{3}-1}\Rightarrow n=1$$

Nếu $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2<1\Leftrightarrow\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2<3\Leftrightarrow\dfrac{n+1}{n}<\sqrt{3}\Leftrightarrow n+1<\sqrt{3}.n\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}-1\right)n>1$

$$\Leftrightarrow n>\frac{1}{\sqrt{3}-1}\Leftrightarrow n>2.$$

7). Dãy số $(u_n)$: Với $u_n=\dfrac{3n^2-2n+1}{n+1}$

Ta có: $u_n=3n-5+\dfrac{6}{n+1}$

Với mọi $n\in N^*$ ta có:

$$u_{n+1}-u_n=\left[3(n+1)-5+\frac{6}{n+2}\right]-\left(3n-5+\frac{6}{n+1}\right)=3+\frac{6}{n+2}-\frac{6}{n+1}$$

$$=3\left[\frac{(n+1)(n+2)+2(n+1)-2(n+2)}{(n+2)(n+1)}\right]=\frac{3(n^2+3n)}{(n+2)(n+1)}>0.\quad\forall n\ge 1.$$

Kết luận $(u_n)$ là dãy số tăng.

8). Dãy số $(u_n)$ với $u_n=\dfrac{n^2+n+1}{2n^2+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{n+\frac{3}{2}}{2n^2+1}$

Với mọi $n\in N^*$, xét hiệu số:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}+\frac{n+1+\frac{3}{2}}{2(n+1)^2+1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{n+\frac{3}{2}}{2n^2+1}\right)=\frac{n+\frac{5}{2}}{2n^2+2n+3}-\frac{n+\frac{3}{2}}{2n^2+1}$$

$$=\frac{\left(n+\frac{5}{2}\right)(2n^2+1)-\left(n+\frac{3}{2}\right)(2n^2+2n+3)}{(2n^2+2n+3)(2n^2+1)}=\frac{-5n-2}{(2n^2+2n+3)(2n^2+1)}<0\quad\forall n\ge 1.$$

Vậy dãy số $(u_n)$ là dãy số giảm.

9). Dãy số $(u_n)$ với $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$

Ta có: $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1} = \dfrac{n^2 - (n^2 - 1)}{n + \sqrt{n^2 - 1}} = \dfrac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$

Dễ dàng ta có: $(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 - 1} > n + \sqrt{n^2 - 1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 - 1}} < \dfrac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$

Từ đó suy ra dãy số $(u_n)$ là dãy số giảm.

10). Dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - 1}{n}$

Ta có: $u_n = \dfrac{(n+1) - 1}{n\left(\sqrt{n+1} + 1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + 1}$

Dễ dàng ta có: $\sqrt{(n+1)+1} + 1 > \sqrt{n+1} + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)+1} + 1} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + 1} \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$. Vậy dãy số $(u_n)$ là dãy số giảm.

**Câu 11:** Chứng minh rằng dãy số $(u_n)$, với $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{2n^2 - 3}$ là một dãy số bị chặn.

**LỜI GIẢI**

Công thức $u_n$ được viết lại: $u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2(2n^2 - 3)}$ $\quad (1)$

Dễ thấy $\forall n \ge 1$ ta có: $-1 \le \dfrac{1}{2n^2 - 3} \le \dfrac{1}{5}$. Do đó từ $(1)$ suy ra $-2 \le u_n \le 1 \quad (\forall n \ge 1)$

Từ đó suy ra $(u_n)$ là một dãy số bị chặn.

**Câu 12:** Chứng minh dãy số $(u_n)$, với $u_n = \dfrac{7n+5}{5n+7}$ là một dãy số tăng và bị chặn.

**LỜI GIẢI**

Công thức $u_n$ được viết lại: $u_n = \dfrac{7}{5} - \dfrac{24}{5(5n+7)}$

Xét hiệu số: $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{7}{5} - \dfrac{24}{5\left[5(n+1)+7\right]}\right) - \left(\dfrac{7}{5} - \dfrac{24}{5(5n+7)}\right)$

$= \dfrac{24}{5}\left(\dfrac{1}{5n+7} - \dfrac{1}{5(n+1)+7}\right) > 0 \quad \forall n \ge 1. \Rightarrow u_{n+1} > u_n$. Vậy dãy số $(u_n)$ là dãy số tăng.

Ta có: $0 < \dfrac{1}{5n+7} \le \dfrac{1}{12} \quad \forall n \ge 1 \Leftrightarrow 0 > -\dfrac{24}{5(5n+7)} \ge -\dfrac{2}{5} \Leftrightarrow \dfrac{7}{5} > \dfrac{7}{5} - \dfrac{24}{5(5n+7)} \ge \dfrac{7}{5} - \dfrac{2}{5}$

$\Leftrightarrow 1 \le u_n < \dfrac{7}{5}$. Suy ra $(u_n)$ là một dãy số bị chặn.

Kết luận $(u_n)$ là một dãy số tăng và bị chặn.

**Câu 13:** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = n^2 - 4n + 3$.

a). Viết công thức truy hồi của dãy số.

b). Chứng minh dãy số bị chặn dưới.
c). Tính tổng n số hạng đầu của dãy số đã cho.

**LỜI GIẢI**

a).Ta có: $u_1 = 1^2 - 4.1 + 3 = 0$.

Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = \left[(n+1)^2 - 4(n+1) + 3\right] - \left(n^2 - 4n + 3\right) = 2n - 3 \quad \Rightarrow u_{n+1} = u_n + 2n - 3$.

Vậy công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 3 \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$

b). Ta có: $u_n = n^2 - 4n + 4 - 1 = (n-2)^2 - 1 \geq -1 \quad \forall n \geq 1$.

Vậy dãy số bị chặn dưới, nhưng không bị chặn trên.

c). Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 1^2 - 4.1 + 3 \\ u_2 = 2^2 - 4.2 + 3 \\ u_3 = 3^2 - 4.2 + 3 \\ \ldots \\ u_n = n^2 - 4.n + 3 \end{array}\right\} +$$

$$S_n = \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right) - 4\left(1 + 2 + 3 + \ldots + n\right) + 3n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1) + 18n}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n-11) + 18n}{6}$$