$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a-3b-7=4 \\ 2a-3b-7=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{3b+11}{2} \\ a=\dfrac{3b+3}{2} \end{array}\right.$$

- $a=\dfrac{3b+11}{2}$ thay vào (1) ta có được :

$$\frac{(3b-9)^2}{4}+(b+7)^2+\frac{(b+13)^2}{4}=180 \Leftrightarrow 14b^2+28b-274=0$$

Bài 11

1. Vì $B \in Oz$ nên $B(0;0;t)$.

Ta có $OB=2OA$ nên $|t|=2\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} \Leftrightarrow t=\pm 6.$

Nếu $t=6$ thì $B(0;0;6)$ nên $\overrightarrow{AB}(-1;\,2;4)$ do đó phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{4}$.

Nếu $t=-6$ thì $B(0;0;-6)$ nên $\overrightarrow{AB}(-1;\,2;-8)$ do đó phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+6}{-8}$.

2. Ta có $C \in d$ nên $C(1+t;\,2t;\,-t)$ mà $d(C,\,(Oxy))=3$ nên $|-t|=3 \Leftrightarrow t=\pm 3.$

Nếu $t=3$ thì $C(4;6;-3)$ nên $\overrightarrow{AC}(3;\,8;-5)$ do đó phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{8}=\dfrac{z-2}{-5}$.

Nếu $t=-3$ thì $C(-2;-6;3)$ nên $\overrightarrow{AC}(-3;\,-4;1)$ do đó phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$.

3. $D \in d'$ nên $D(-1+2t;2+t;1-t)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}(1;\,-2;\,2)$, $\overrightarrow{OD}(-1+2t;\,2+t;\,1-t)$

nên $\left[\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OD}\right]=(-6;\,5t-3;\,5t)$.

Do đó $S_{OAD}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OD}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(5t-3)^2+(5t)^2}$.

Theo bài ra $S_{OAD}=\dfrac{45}{2}$, nên

$$\sqrt{(-6)^2+(5t-3)^2+(5t)^2}=45 \Leftrightarrow 5t^2-3t-198=0 \Rightarrow t=-6;\ t=\frac{33}{5}.$$

Nếu $t=-6$ thì $D(-13;-4;7)\Rightarrow \overrightarrow{AD}(-14;-2;5)$, do đó phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{-14}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-2}{5}$.

Nếu $t=\frac{33}{5}$ thì $D\left(\frac{61}{5};\frac{43}{5};-\frac{28}{5}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AD}\left(\frac{56}{5};\frac{53}{5};-\frac{38}{5}\right)$, do đó phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{56}=\frac{y+2}{53}=\frac{z-2}{-38}$.

Bài 12

1. $M(1+2t;-1+t;2+3t)\Rightarrow \overrightarrow{AM}(2t-1;t-2;2+3t)$.

$$AM=3\Leftrightarrow \sqrt{14t^2+4t+9}=3\Leftrightarrow t=0 \text{ hoặc } t=-\frac{2}{7}$$

$t=0\Rightarrow \overrightarrow{AM}(-1;-2;2)$ nên $\Delta: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-2}$.

$t=-\frac{2}{7}\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{7}(11;16;-8)$ nên $\Delta: \frac{x-2}{11}=\frac{y-1}{16}=\frac{z}{-8}$.

2. $N(1+2t;-1+t;2+3t)\Rightarrow \overrightarrow{BN}(2t+1;t-5;2+3t)$.

$$\overrightarrow{BC}(0;-2;-1)\Rightarrow \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BN}\right]=(-9-5t;-1-2t;4t+2).$$

Diện tích tam giác BNC là $S_{BNC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BN}\right]\right|$ nên

$$\frac{1}{2}\sqrt{(-9-5t)^2+(-1-2t)^2+(4t+2)^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 45t^2+110t+86=21\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-\frac{13}{9}\end{array}\right.$$

$t=-\frac{13}{9}\Rightarrow \overrightarrow{BN}\left(-\frac{17}{9};-\frac{58}{9};-\frac{7}{3}\right)$ nên $\Delta: \frac{x}{17}=\frac{y-4}{58}=\frac{z}{21}$.

$t=-1\Rightarrow \overrightarrow{BN}(-1;-6;-1)$ nên $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y-4}{6}=\frac{z}{1}$.

3. Ta có $D(1+2t;-1+t;2+3t), \overrightarrow{AB}(-2;3;0), \overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$ nên

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-3;-2;4)\Rightarrow S_{ABC}=\frac{\sqrt{29}}{2}\Rightarrow d(D,(ABC))=\frac{19}{\sqrt{29}}.$$

Phương trình $(ABC): 3x+2y-4z-8=0$.

Do đó $|4t+15|=19\Rightarrow t=1;\ t=-\frac{17}{2}$.

Có hai đường thẳng thỏa mãn là

$$\Delta: \frac{x-3}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-5}{-4} \text{ hoặc } \Delta: \frac{x+16}{3}=\frac{y+\frac{19}{2}}{2}=\frac{z+\frac{47}{2}}{-4}.$$

Bài 13

1. $\Delta_1 \cap \Delta_2 = I(1;\ 0;\ 1)$.

2. $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{1}{2}$ nên $S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB\sin(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\sqrt{3}}{4}IA^2 \Rightarrow IA=IB=\sqrt{2}$.

Gọi $A(-1+a;-2+a;1), B(1-b;0;\ 1+b)$ ta có

$$IA=\sqrt{2} \Leftrightarrow |a-2|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=1 \end{array}\right. \Rightarrow A_1(2;1;1),\ A_2(0;-1;1).$$

$$IB=\sqrt{2} \Leftrightarrow |b|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1 \end{array}\right. \Rightarrow B_1(0;0;2),\ B_2(2;0;0).$$

Có bốn đường thẳng thỏa mãn là

$$\Delta(A_1B_1): \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1};\quad \Delta(A_2B_2): \frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$$

$$\text{Và } \Delta(A_1B_2): \begin{cases} x=2 \\ y=m,\ (t\in R) \\ z=m \end{cases} \quad \Delta(A_2B_1): \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=2+n \end{cases} (m,n\in\mathbb{R}).$$

Bài 14

1. Đường thẳng d_1 đi qua $A(1;-3;-2)$ và có $\overrightarrow{u_1}=(1;2;3)$ là VTCP

Đường thẳng d_2 đi qua $B(4;2;3)$ và có $\overrightarrow{u_2}=(1;-4;-3)$ là VTCP

Ta có: $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(6;6;-6)$, $\overrightarrow{AB}=(3;5;5) \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{AB}=18\neq 0$ suy ra hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau.

Gọi MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 (với $M\in d_1$, $N\in d_2$)

Suy ra $M(1+t;-3+2t;-2+3t)$, $N(4+t';2-4t';3-3t')$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(-t+t'+3;-2t-4t'+5;-3t-3t'+5)$$

$$\text{Vì } \begin{cases} MN\perp d_1 \\ MN\perp d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1(-t+t'+3)+2(-2t-4t'+5)+3(-3t-3t'+5)=0 \\ 1(-t+t'+3)-4(-2t-4t'+5)-3(-3t-3t'+5)=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7t+8t'-14=0 \\ 8t+13t'-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t'=0 \end{cases}$

Từ đó suy ra $M(3;1;4)$, $\overrightarrow{MN}=(1;1;-1)$

Vậy phương trình $MN: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-1}$.

2. Ta có $A(1+2a;\ a;\ 3+a)$, $B(b;\ 2+2b; 1+3b)$.

Vì $AB \perp d_3$ nên $\overrightarrow{AB}.\vec{u}_{d_3}=0 \Leftrightarrow 1+9a=10b$.

Vì $AB=\sqrt{13}$ nên tìm được hai cặp điểm là

$a=b=1$ thì $A(3;\ 1;\ 4)$, $B(1;\ 4;\ 4)$

$a=-\dfrac{223}{237}, b=-\dfrac{177}{237}$ thì $A\left(-\dfrac{209}{237}; -\dfrac{223}{237}; \dfrac{488}{237}\right)$, $B\left(-\dfrac{177}{237}; \dfrac{120}{237}; -\dfrac{294}{237}\right)$.

Bài 15

1. Gọi $M=\Delta \cap \Delta_1$ thì $M(t;\ -1+2t;\ 6-t)$.

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{AM}(t+1;\ -1+2t;\ 2-t)$.

Vì góc giữa hai đường thẳng là 60^0 nên $\cos 60^0=\cos(\Delta,\Delta_1)$, hay

$$\frac{1}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{AM}.\vec{u}_{\Delta_1}\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|.\left|\vec{u}_{\Delta_1}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{|t+1-2+4t-2+t|}{\sqrt{(t+1)^2+(-1+2t)^2+(2-t)^2}.\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow 3t^2-3t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right..$$

Nếu $t=0$ thì $\overrightarrow{AM}(1;\ -1;\ 2)$ nên Δ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \qquad (t\in\mathbb{R}). \\ z=4+2t \end{cases}$$

Nếu $t=1$ thì $\overrightarrow{AM}(2;\ 1;\ 1)$ nên Δ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \qquad (t\in\mathbb{R}). \\ z=4+t \end{cases}$$

2. Gọi $N=\Delta \cap \Delta_2$ thì $N(1+3t;\ 1+2t;\ 5+2t)$.

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{BN}(3t+4;\ 2t+2;\ 2t+2)$.

Vì góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z+5=0$ là 30^0 nên

$\sin 30^0 = \sin(\Delta,(\alpha)) = \left|\cos(\vec{u}_\Delta, \vec{n}_{(\alpha)})\right|$, hay

$$\frac{1}{2} = \frac{\left|\overrightarrow{BN}.\vec{n}_{(\alpha)}\right|}{\left|\overrightarrow{BN}\right|.\left|\vec{n}_{(\alpha)}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\left|3t+4+4+4t-2-2t\right|}{\sqrt{(3t+4)^2+(2+2t)^2+(2+2t)^2}.\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow 4(5+6t)^2 = 3\left[(3t+4)^2+2(2+2t)^2\right] \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Với $t=0$ thì $\overrightarrow{BN}(4;\ 2;\ 2) = 2(2;\ 1;\ 1)$ nên

Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = -1+t \\ z = 3+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Bài 16

Đường thẳng d_m đi qua $A(4m-3; 2m+3; 8m+7)$ và có

$\vec{u} = \left(2m-1; m+1; 4m+3\right)$

Giả sử $d_m \subset (\alpha): ax+by+cz+d=0$ với mọi m, khi đó ta có:

$$\begin{cases} a(2m-1)+b(m+1)+c(4m+3)=0 \\ a(4m-3)+b(2m+3)+c(8m+7)+d=0 \end{cases} \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2a+b+4c)m-a+b+3c=0 \\ (4a+2b+8c)m-3a+3b+7c+d=0 \end{cases} \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+4c=0 \\ -a+b+3c=0 \\ 2a+b+4c=0 \\ -3a+3b+7c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=10a \\ c=-3a \\ d=-6a \end{cases}$$, ta chọn

$a=1 \Rightarrow b=10, c=-3, d=-6$

Vậy $d_m \subset (\alpha): x+10y-3z-6=0$.