Chứng minh rằng phương trình $8x^3 - 6x - 1 = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt. Hãy tìm 3 nghiệm đó.

Đặt $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$; tập xác định $D =$ ¡ suy ra hàm số liên tục trên ¡ . Ta có

$f(-1) = -3,\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1,\ f(0) = -1,\ f(1) = 1$ suy ra $f(-1)f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0, f\left(-\frac{1}{2}\right)f(0) < 0, f(0)f(1) < 0$. Từ 3 bất đẳng thức này và tính liên tục của hàm số suy ra pt $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt thuộc $(-1;\ 1)$. Đặt $x = \cos t,\ t \in [0;\ \pi]$ thay vào pt ta được:

$2\left(4\cos^3 t - 3\cos t\right) = 1 \Leftrightarrow \cos 3t = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t = \pm\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$, kết hợp với $t \in [0;\ \pi]$ ta được $t \in \left\{\frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}\right\}$.

Do đó phương trình đã cho có 3 nghiệm:

$x = \cos\frac{\pi}{9}, x = \cos\frac{5\pi}{9}, x = \cos\frac{7\pi}{9}$.

Cho phương trình: $m(x-1)\left(x^3 - 4x\right) + x^3 - 3x + 1 = 0$ (x là ẩn, m là tham số). Chứng minh rằng với mọi giá trị thực của m phương trình đã cho có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x) = m(x-1)\left(x^3 - 4x\right) + x^3 - 3x + 1$ ta được $f(x)$ xác định và liên tục trên ¡ .

Ta có $f(-2) = -1, f(0) = 1, f(1) = -1, f(2) = 3$

Do đó ta được $f(-2)f(0) < 0, f(0)f(1) < 0, f(1)f(2) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(-2;0), (0;1), (1;2)$ suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Tìm n số nguyên dương nhỏ nhất sao cho phương trình $x^6 + 1 = 4x^2\sqrt{x^n - 1}$ có nghiệm.

Ta có $x^6 + 1 = 4x^2\sqrt{x^n - 1} \Leftrightarrow x^6 + 1 - 4x^2\sqrt{x^n - 1} = 0$. Đặt $f(x) = x^6 + 1 - 4x^2\sqrt{x^n - 1}$.

Điều kiện để hàm số xác định $x^n - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x^n \ge 1$.

Nếu n lẻ: hàm số xác định $\Leftrightarrow x \ge 1$.

Nếu n chẵn: Hàm số xác định $\Leftrightarrow x \le -1 \vee x \ge 1$. Khi đó $f(x)$ là hàm số chẵn trên tạp xác định của nó nên nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = x_0 \le -1$ thì cũng có nghiệm $x = -x_0 \ge 1$. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $x \ge 1$.

Ta có $x^6 + 1 = \left(x^2 + 1\right)\left(x^4 - x^2 + 1\right) = \left(x^2 + 1\right)\left[x^2\left(x^2 - 1\right) + 1\right]$

Ta có $\begin{cases} x^2+1 \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2x \\ x^2\left(x^2-1\right)+1 \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2x\sqrt{x^2-1} \end{cases} \Rightarrow x^6+1 \geq 4x^2\sqrt{x^2-1}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x^2=1 \\ x^2\left(x^2-1\right)=1 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm. Do đó $x^6+1>4x^2\sqrt{x^2-1}, \forall x \geq 1$

Vì $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm khi $n \leq 2$.

Với $n=3$ ta có $f(x)=x^6+1-4x^2\sqrt{x^3-1}$.

Có $f(1)=2$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^6+1-4.\left(\frac{3}{2}\right)^2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3-1}=\frac{793}{64}-9.\sqrt{\frac{19}{8}}$.

Vì $\begin{cases} \frac{793}{64}<\frac{832}{64}=13 \\ 9.\sqrt{\frac{19}{8}}>9.\sqrt{\frac{18}{8}}=13.5 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)<0$. Từ đó có $f(1).f\left(\frac{3}{2}\right)<0$ (1).

Hàm số xác định và liên tục trên $\left[1;+\infty\right)$ do đó hàm số f(x) liên tục trên đoạn $\left[1;\frac{3}{2}\right]$ (2). Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Kết luận $n=3$ là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho phương trình $x^6+1=4x^2\sqrt{x^n-1}$ có nghiệm.

Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2-1$

a). Chứng minh phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x_0 \in (3;4)$.

b). Không tính $f\left(\sqrt[5]{36}\right)$ và $f\left(1+\sqrt[5]{36}\right)$ hãy chứng minh $x_0>1+\sqrt[5]{36}$.

LỜI GIẢI

Ta có $f(3)=-1$ và $f(4)=15$ nên $f(3).f(4)<0$ (1). Vì hàm số xác định và liên tục trên R nên nên hàm số f(x) liên tục trên đoạn $\left[3;4\right]$ (2). Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $x_0 \in (3;4)$.

Ta có $f(x)=x^3-3x^2-1=x^3-3x^2+3x-3x+3-3-1=(x-1)^3-3(x-1)-3$. Vì x_0 là nghiệm của phương trình $f(x)=0$ nên $f(x_0)=0 \Leftrightarrow (x_0-1)^3-3(x_0-1)-3=0$.

Đặt $\alpha=x_0-1$ vì $x_0 \in (3;4) \Rightarrow \alpha \in (2;3)$ và $\alpha^3-3\alpha-3=0 \Leftrightarrow \alpha^3=3\alpha+3$.

Áp dụng định lý Cauchy cho hai số không âm 3α và 3 ta có
$\alpha^3=3\alpha+3 \geq 2\sqrt{3\alpha.3} \Rightarrow \alpha^3 \geq 6\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \alpha^6 \geq 36\alpha \Leftrightarrow \alpha^5 \geq 36 \Leftrightarrow \alpha \geq \sqrt[5]{36}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1 \notin (2;3) \Rightarrow \alpha > \sqrt[5]{36} \Leftrightarrow x_0 - 1 > \sqrt[5]{36} \Leftrightarrow x_0 > 1 + \sqrt[5]{36}$.