6). $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9.

Đặt $u_n = 4^n + 15n - 1$

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 4^1 + 15.1 - 1 = 18$ chia hết cho 9 (đúng).

Giả sử $u_k = 4^k + 15k - 1$ chia hết cho 9.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ chia hết cho 9.

Thật vậy ta có $u_{k+1} = 4.4^k + 15k + 14 = 4\left(4^k + 15k - 1\right) - 45k + 18 = 4.u_k + 9\left(2 - 5k\right)$

Vì $4.u_k$ và $9\left(2 - 5k\right)$ đều chia hết cho 9, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 9.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 9.

7). $4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9.

Đặt $u_n = 4^n + 6n + 8$

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 4^1 + 6.1 + 8 = 18$ chia hết cho 9 (đúng).

Giả sử $u_k = 4^k + 6k + 8$ chia hết cho 9.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 4^{k+1} + 6(k+1) + 8$ chia hết cho 9.

Thật vậy ta có $u_{k+1} = 4.4^k + 6k + 14 = 4\left(4^k + 6k + 8\right) - 18k + 18 = 4u_k + 18\left(1 - k\right)$

Vì $4.u_k$ và $18\left(1 - k\right)$ đều chia hết cho 9, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 9.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 9.

8). $7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5

Đặt $u_n = 7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 7.2^{2.1-2} + 3^{2.1-1} = 10$ chia hết cho 5 (đúng).

Giả sử $u_k = 7.2^{2k-2} + 3^{2k-1}$ chia hết cho 5.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 7.2^{2k} + 3^{2k+1}$ chia hết cho 5.

Thật vậy ta có $u_{k+1} = 4\left(7.2^{2k-2} + 3^{2k-1}\right) - 4.3^{2k-1} + 3^{2k+1} = 4.u_k + 5.3^{2k-1}$

Vì $4.u_k$ và 5.3^{2k-1} đều chia hết cho 5, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 5.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 5.

9). $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7.

Đặt $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 3^{2.1+1} + 2^{1+2} = 35$ chia hết cho 7 (đúng).

Giả sử $u_k = 3^{2k+1} + 2^{k+2}$ chia hết cho 7.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 3^{2k+3} + 2^{k+3}$ chia hết cho 7.

Thật vậy ta có $u_{k+1} = 3^{2k+1+2} + 2^{k+2+1} = 3^2.3^{2k+1} + 2.2^{k+2} = 9\left(3^{2k+1} + 2^{k+2}\right) - 7.2^{k+2} = 9u_k - 7.2^{k+2}$

Vì $9.u_k$ và 7.2^{k+2} đều chia hết cho 7, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 7.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 7.

10). $11^{n+1}+12^{2n-1}$ chia hết cho 133.

Đặt $u_n=11^{n+1}+12^{2n-1}$

Với $n=1$, ta có $u_1=11^{1+1}+12^{2.1-1}=133$ chia hết cho 133 (đúng).

Giả sử $u_k=11^{k+1}+12^{2k-1}$ chia hết cho 133.

Ta cần chứng minh $u_{k+1}=11^{k+1+1}+12^{2k+2-1}$ chia hết cho 133.

Thật vậy ta có $u_{k+1}=11.11^{k+1}+12^2.12^{2k-1}=11\left(11^{k+1}+12^{2k-1}\right)+133.12^{2k-1}=11.u_k+133.12^{2k-1}$

Vì $11.u_k$ và 133.12^{2k-1} đều chia hết cho 133, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 133.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 133.

11). Chứng minh ∀n ∈ ¥ * thì $16^n-15n-1$ chia hết cho 225.

Đặt $u_n=16^n-15n-1$

Với $n=1$, ta có $u_1=16^1-15.1-1=0$ chia hết cho 225 (đúng).

Giả sử $u_k=16^k-15k-1$ chia hết cho 225.

Ta cần chứng minh $u_{k+1}=16^{k+1}-15(k+1)-1$ chia hết cho 225.

Thật vậy ta có $u_{k+1}=16^{k+1}-15(k+1)-1=16.16^k-15k-16=16\left(16^k-15k-1\right)+225k=16u_k+225k$

Vì $16u_k$ và $225k$ đều chia hết cho 225, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 225.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 225.

12). Chứng minh ∀n ∈ ¥ thì $4.3^{2n+2}+32n-36$ chia hết cho 32.

Đặt $u_n=4.3^{2n+2}+32n-36$

Với $n=1$, ta có $u_1=4.3^{2+2}+32-36=320$ chia hết cho 32 (đúng).

Giả sử $u_k=4.3^{2k+2}+32k-36$ chia hết cho 32.

Ta cần chứng minh $u_{k+1}=4.3^{2(k+1)+2}+32(k+1)-36$ chia hết cho 32.

Thật vậy ta có $u_{k+1}=9.4.3^{2k+2}+32k-4=9\left(4.3^{2k+2}+32k-36\right)-32(8k-32)=9u_k-32(8k-32)$

Vì $9u_k$ và $32(8k-32)$ đều chia hết cho 32, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 32.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 32.

13). $3^{3n+3}-26n-27$M169, ∀n ∈ ¥ *

Đặt $u_n=3^{3n+3}-26n-27$

Với $n=1$, ta có $u_1=3^{3+3}-26-27=676$ chia hết cho 169 (đúng).

Giả sử $u_k=3^{3k+3}-26k-27$ chia hết cho 169.

Ta cần chứng minh $u_{k+1}=3^{3(k+1)+3}-26(k+1)-27$ chia hết cho 169.

Thật vậy ta có $u_{k+1}=27.3^{3k+3}-26k-26-27=27\left(3^{3k+3}-26k-27\right)+26.26k+676$

$=27u_k+169\left(4k+4\right)$

Vì $27u_k$ và $169\left(4k+4\right)$ đều chia hết cho 169, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 169.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 169.

Câu 3 : Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ **, ta có:**

1). $3^{n-1} > n(n+2)$ (*)$\forall n \geq 4, n \in \mathbb{N}$

2). $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}$ $(*), \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

3). $n^n \geq (n+1)^{n-1}$ $(*) \forall n \in \mathbb{N}^*$

4). $(n!)^2 \geq n^n$ $(*) \forall n \in \mathbb{N}^*$

5). $3^n > n^2 + 4n + 5$ (*), $\forall n \geq 3$

6). $2^n > 2n + 1$ (*)$\forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}$

7). $2^n > n^2, \forall n \geq 5, n \in \mathbb{N}$

LỜI GIẢI

1). $3^{n-1} > n(n+2)$ (*)$\forall n \geq 4, n \in \mathbb{N}$

Với $n = 4$, $VT = 3^{4-1} = 27, VP = 4.6 = 24$, vậy (*) đúng với $n = 4$.

Giả sử ta có $3^{k-1} > k(k+2)$ đúng.

Ta cần chứng minh $3^{k+1-1} > (k+1)(k+3)$

Thật vậy, $3^{k+1-1} = 3.3^{k-1} > 3k(k+2)$. Ta lại có $3k(k+2) > (k+1)(k+3) \Leftrightarrow 2k^2 + 2k - 4 > 0$, bất đẳng thức này đúng với mọi $k \geq 4$. Suy ra $3^{k+1-1} > (k+1)(k+3)$ (đúng).

Do đó theo nguyên lí quy nạp, (*) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 4$.

2). $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}$ $(*), \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

đặt $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{n+n}$

Với $n = 2$ ta có $u_2 = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$ (đúng).

Giả sử với $n = k$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có: $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k} > \frac{13}{24}$

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n = k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh:

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{k+k} + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} > \frac{13}{24}$$

Thật vậy ta có: $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{k+k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} - \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k}\right)$

$= \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0$ (đúng).

Vậy $u_{k+1} > u_k > \frac{13}{24}$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n = k+1$.

Suy ra (*) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$.

3). $n^n \geq (n+1)^{n-1}$ $(*) \forall n \in \mathbb{N}^*$

Với $n = 1$ ta có $1^1 \geq (1+1)^0 \Leftrightarrow 1 \geq 1$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n = 1$.

Giả sử với $n = k$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có: $k^k \geq (k+1)^{k-1}$ (1).

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n = k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh:

$(k+1)^{k+1} \geq (k+2)^k$

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với $(k+1)^{k+1}$ ta được: $k^k(k+1)^{k+1} \geq (k+1)^{k-1}(k+1)^{k+1}$

$$\Leftrightarrow k^k(k+1)^{k+1} \geq (k+1)^{2k} \Leftrightarrow (k+1)^{k+1} \geq \frac{(k+1)^{2k}}{k^k} \Leftrightarrow (k+1)^{k+1} \geq \frac{(k^2+2k+1)^k}{k^k}$$

$$\Leftrightarrow (k+1)^{k+1} \geq \left(\frac{k^2+2k+1}{k}\right)^k \Leftrightarrow (k+1)^{k+1} \geq \left(k+2+\frac{1}{k}\right)^k > (k+2)^k \text{ (đúng).}$$

Vậy (*) đúng với $n = k+1$. Do đó (*) đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

4). $(n!)^2 \geq n^n \ (*) \forall n \in \mathbb{N}^*$

Với $n = 1$ ta có $1^1 \geq (1+1)^0 \Leftrightarrow 1 \geq 1$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n = 1$.

Giả sử với $n = k$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có: $(k!)^2 \geq k^k$ (1).

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n = k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh:

$((k+1)!)^2 \geq (k+1)^{k+1}$.

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với $(k+1)^2$ ta được: $(k!)^2(k+1)^2 \geq k^k(k+1)^2$

$\Leftrightarrow ((k+1)!)^2 \geq k^k(k+1)^2 \Leftrightarrow ((k+1)!)^2 \geq (k+1)^{k-1}(k+1)^2$ (theo câu c)).

$\Leftrightarrow ((k+1)!)^2 \geq (k+1)^{k+1}$. Vậy (*) đúng với $n = k+1$.

Vậy (*) đúng với mọi số nguyên dương $n \in \mathbb{N}^*$.

5). $3^n > n^2 + 4n + 5$ (*), $\forall n \geq 3$

Với $n = 1$ ta có $3^3 > 3^2 + 4.3 + 5 \Leftrightarrow 27 > 26$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n = 1$.

Giả sử với $n = k, k \geq 3$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có: $3^k > k^2 + 4k + 5$ (1).

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n = k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh:

$3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 3 ta được: $3.3^k > 3.k^2 + 12k + 15$

$3^{k+1} > (k^2 + 2k + 1) + 4(k+1) + 5 + (2k^2 + 6k + 5)$

Vì $(2k^2 + 6k + 5) > 0 \ \forall k \geq 3$. Vậy $3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$ (đúng).

Vậy (*) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 3$.

6). $2^n > 2n + 1$ (*)$\forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}$

Với $n = 3$ ta có $2^3 > 2.3 + 1 \Leftrightarrow 8 > 7$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n = 3$.

Giả sử với $n = k, k \geq 3$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có: $2^k > 2k + 1$ (1).

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n = k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh: $2^{k+1} > 2k + 3$

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 2 ta được: $2.2^k > 2(2k+1) \Leftrightarrow 2^{k+1} > 4k + 2$

$\Leftrightarrow 2^{k+1} > 2k + 3$ (đúng), vì $4k + 2 > 2k + 3 \Leftrightarrow 2k > 1 \ \forall k \geq 3$