Câu 2: Tìm a, b biết rằng: 1, a, b là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng và $1, a^2, b^2$ là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

LỜI GIẢI

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 1+b=2a \\ b^2=a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+b=2a\ (1) \\ b=\pm a^2 \end{cases}$

Với $b=a^2$ thay vào (1) được $1+a^2=2a \Leftrightarrow a^2-2a+1=0 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=1$

Với $b=-a^2$ thay vào (1) được $1-a^2=2a \Leftrightarrow a^2+2a-1=0 \Leftrightarrow a=-1+\sqrt{2} \vee a=-1-\sqrt{2}$

$g\,a=-1+\sqrt{2} \Rightarrow b=-\left(-1+\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow b=-3+2\sqrt{2}$

$g\,a=-1-\sqrt{2} \Rightarrow b=-\left(-1-\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow b=-3-2\sqrt{2}$

Kết luận $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1+\sqrt{2} \\ b=-3+2\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1-\sqrt{2} \\ b=-3-2\sqrt{2} \end{cases}$ thỏa yêu cầu đề bài.

Tìm số hạng đầu của CSN biết công bội bằng 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối bằng 486.

LỜI GIẢI

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} S_n=728 \\ u_n=486 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=728 \\ u_1q^{n-1}=486 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1-u_1q^n=728(1-q) \\ u_1q^n=486q \end{cases} \Rightarrow u_1-486q=728(1-q) \Leftrightarrow u_1=2$

1.123: Cho 3 số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21.Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

LỜI GIẢI

Gọi u_1, u_2, u_3 thành lập cấp số cộng.

Theo đề bài: $u_1+2; u_2+3; u_3+9$ là ba số liên tiếp tạo thành cấp số nhân.

Theo đề bài: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=21 \\ u_1+u_3=2u_2 \\ \left(u_1+2\right)\left(u_3+9\right)=\left(u_2+3\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2=21 \\ u_1+u_3=2u_2 \\ \left(u_1+2\right)\left(u_3+9\right)=\left(u_2+3\right)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_2=7 \\ u_1=14-u_3 \\ \left(14-u_3+2\right)\left(u_3+9\right)=100\ (*) \end{cases}$

Giải $(*)$: $\left(16-u_3\right)\left(u_3+9\right)=100 \Leftrightarrow -u_3{}^2+7u_3+44=0 \Leftrightarrow u_3=11 \vee u_3=-4$

Với $u_3=11 \Rightarrow u_1=3$. Với $u_3=-4 \Rightarrow u_1=18$.

2.123: Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tìm 3 số đó.

LỜI GIẢI

Gọi u_1, u_2, u_3 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Theo đề: $u_1 - 1; u_3 - 19$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Ta có: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 65 \\ u_1 - 1 + u_3 - 19 = 2u_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 65 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1.q + u_1.q^2 = 65 \\ u_1 - 2u_1.q + u_1.q^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 65 \;\; (1) \\ u_1\left(1-2q+q^2\right) = 20 \;\; (2) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \dfrac{1+q+q^2}{1-2q+q^2} = \dfrac{65}{20} = \dfrac{13}{4} \Leftrightarrow 4\left(1+q+q^2\right) = 13\left(1-2q+q^2\right)$

$\Leftrightarrow 9q^2 - 30q + 9 = 0 \Leftrightarrow q = 3 \;\vee\; q = \dfrac{1}{3}$

Vì u_1, u_2, u_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân tăng dần nên chọn $q = 3 \Rightarrow u_1 = 5$

Vậy $u_1 = 5;\ u_2 = 15;\ u_3 = 45.$

7.124: Cho x, 3, y theo thứ tự lập thành cấp số nhân và $x^4 = y\sqrt{3}$. Tìm x, y.

LỜI GIẢI

Ta có: $x.y = 9 \Rightarrow y = \dfrac{9}{x}$

Thay vào $x^4 = y\sqrt{3} \Leftrightarrow x^4 = \dfrac{9}{x}\sqrt{3} \Leftrightarrow x^5 = \left(\sqrt{3}\right)^4.\sqrt{3} \Leftrightarrow x^5 = \left(\sqrt{3}\right)^5 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow y = \dfrac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$. Kết luận $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 3\sqrt{3} \end{cases}$

Cho tổng $A = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$. Chứng minh rằng $A = \dfrac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{81}$

LỜI GIẢI

Ta có $A = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n} \Leftrightarrow 9A = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{n}$

$= (10-1) + \left(10^2 - 1\right) + \left(10^3 - 1\right) + \cdots + \left(10^n - 1\right)$

$= \left(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n\right) - \left(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n}\right)$

$= \dfrac{10\left(1 - 10^n\right)}{1 - 10} - n = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$

Vậy $A = \dfrac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{81}$

Tính tổng $B = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{77\ldots7}_{n}$

$B = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{77\ldots7}_{n}$

$\Leftrightarrow B = 7\left(1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{B}{7} = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7} = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99...9}_{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7} = (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \cdots + (10^n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7} = (10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n) - (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n})$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7} = \frac{10(1-10^n)}{1-10} - n$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{7(10^{n+1} - 9n - 10)}{81}$$

Cho cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0, q \neq \pm 1$. Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên. Chứng minh: $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$

LỜI GIẢI

$$VT = S_n(S_{3n} - S_{2n}) = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}\left(\frac{u_1(1-q^{3n})}{1-q} - \frac{u_1(1-q^{2n})}{1-q}\right)$$

$$= \frac{u_1^2}{(1-q)^2}\cdot(1-q^n)\cdot(q^{2n}-q^{3n}) = \frac{u_1^2}{(1-q)^2}\cdot(1-q^n)\cdot q^{2n}\cdot(1-q^n) = \left(\frac{u_1q^n(1-q^n)}{1-q}\right)^2 \quad (1)$$

$$VP = (S_{2n} - S_n)^2 = \left[\frac{u_1(1-q^{2n})}{1-q} - \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}\right]^2 = \left\{\frac{u_1}{1-q}\left[(1-q^n)(1+q^n) - (1-q^n)\right]\right\}^2$$

$$= \left[\frac{u_1}{1-q}q^n(1-q^n)\right]^2 \quad (2)$$

Kết luận từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Cho ba số dương a, b, c lập thành CSN. Chứng minh:
$\frac{1}{3}(a+b+c), \sqrt{\frac{1}{3}(ab+bc+ca)}, \sqrt[3]{abc}$ cũng lập thành CSN.

LỜI GIẢI

Ta có $ac = b^2$ (tính chất CSN)

Ta phải chứng minh: $\frac{1}{3}(a+b+c).\sqrt[3]{abc} = \left(\sqrt{\frac{1}{3}(ab+bc+ca)}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(a+b+c)\sqrt[3]{b^3} = \frac{1}{3}(ab+bc+ca) \Leftrightarrow \frac{1}{3}(a+b+c)b = \frac{1}{3}(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(ab+b^2+cb) = \frac{1}{3}(ab+bc+ca) \Leftrightarrow \frac{1}{3}(ab+ac+cb) = \frac{1}{3}(ab+bc+ca) \text{ (đpcm).}$$