Câu 7: Định x để 3 số $10-3x, 2x^2+3, 7-4x$ theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng.

LỜI GIẢI

Theo tính chất cấp số cộng ta có: $(10-3x)+(7-4x)=2(2x^2+3)$

$\Leftrightarrow 17-7x=4x^2+6 \Leftrightarrow 4x^2+7x-11=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-\dfrac{11}{4}$.

Câu 8 : Một tam giác vuông có chu vi bằng 3a, và 3 cạnh lập thành một CSC. Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo a.

LỜI GIẢI

Gọi x, y, z theo thứ tự tăng dần của độ dài ba cạnh của tam giác.

Chu vi của tam giác: $x+y+z=3a$ (1)

Tính chất của CSC có $x+z=2y$ (2)

Vì tam giác vuông nên có: $x^2+y^2=z^2$ (3)

Thay (2) vào (1) được $3y=3a \Leftrightarrow y=a$, thay y = a vào (2) được: $x+z=2a \Rightarrow x=2a-z$

Thay x và y vào (3) được: $(2a-z)^2+a^2=z^2 \Leftrightarrow 5a^2-4az=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{5a}{4} \Rightarrow x=\dfrac{3a}{4}$

Kết luận độ dài ba cạnh của tam giác thỏa yêu cầu: $\dfrac{3a}{4}, a, \dfrac{5a}{4}$.

Câu 9 : Tìm 3 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83.

LỜI GIẢI

Gọi ba số hạng liên tiếp của CSC là $u_1=u-d, u_2=u, u_3=u+d$ với công sai là d:

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=15 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=83 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u=15 \\ (u-d)^2+u^2+(u+d)^2=83 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ d^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ d=\pm 2 \end{cases}$

Với $d=2 \Rightarrow u_1=3, u_2=5, u_3=7$

Với $d=-2 \Rightarrow u_1=7, u_2=5, u_3=3$.

Câu 10 : Tìm 5 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.

LỜI GIẢI

Gọi năm số hạng liên tiếp của CSC là $u_1=u-2d, u_2=u-d, u_3=u, u_4=u+d, u_5=u+2d$ với công sai là d:

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=40 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2=480 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5u=40 \\ (u-2d)^2+(u-d)^2+u^2+(u+d)^2+(u+2d)^2=480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=8 \\ d^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=8 \\ d=\pm 4 \end{cases}$

Với $d=4 \Rightarrow u_1=0, u_2=4, u_3=8, u_4=12, u_5=16$.

Với $d=-4 \Rightarrow u_1=16, u_2=12, u_3=8, u_4=4, u_5=0$

Câu 11: Tìm 4 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

LỜI GIẢI

Gọi bốn số hạng liên tiếp của CSC là $u_1=u-3d, u_2=u-d, u_3=u+d, u_4=u+3d$ với công sai là 2d:

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 10 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 30 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u = 10 \\ (u-3d)^2 + (u-2d)^2 + (u+2d)^2 + (u+3d)^2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{5}{2} \\ d^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 \\ d = \pm 4 \end{cases}$$

Câu 12: Một CSC có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của CSC đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

LỜI GIẢI

Gọi $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ là bảy số hạng liên tiếp của CSC với công sai d.

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u_4 = 11 \\ u_3 - u_5 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 11 \\ (u_1 + 2d) - (u_1 + 5d) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 11 \\ d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 17 \\ d = -2 \end{cases}$

Kết luận: $u_1 = 17, u_2 = 15, u_3 = 13, u_4 = 11, u_5 = 9, u_4 = 7, u_5 = 5, u_6 = 3, u_7 = 1$.

Câu 13: Một CSC có 7 số hạng mà tổng của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 28, tổng số hạng thứ năm và số hạng cuối bằng 140. Tìm CSC đó.

LỜI GIẢI

Gọi $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ là bảy số hạng liên tiếp của CSC với công sai d.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_3 + u_5 = 28 \\ u_5 + u_7 = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d = 28 \\ u_1 + 4d + u_1 + 6d = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 28 \\ 2u_1 + 10d = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -70 \\ d = 28 \end{cases}$$

Câu 14: Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được CSC có tám số hạng. Tìm CSC đó

LỜI GIẢI

Gọi $3, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, 24$ là CSC cần tìm, ta có:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_8 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 + 7d = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy $u_1 = 3, u_2 = 6, u_3 = 9, u_4 = 12, u_5 = 15, u_6 = 18, u_7 = 21, u_8 = 24$

Câu 15: Ba góc của một tam giác vuông lập thành một CSC. Tìm số đo các góc đó.

LỜI GIẢI

Gọi 3 góc A, B, C theo thứ tự đó là ba góc của tam giác ABC lập thành CSC.

Ta có $\begin{cases} A + B + C = 180 \\ A + C = 2B \\ C = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 90 \\ A - 2B = -90 \\ C = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 30 \\ B = 60 \\ C = 90 \end{cases}$

Câu 16: Bốn số nguyên lập thành CSC, biết tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\dfrac{25}{24}$. Tìm bốn số đó.

LỜI GIẢI

Gọi bốn số hạng liên tiếp của CSC là $u_1 = u - 3d, u_2 = u - d, u_3 = u + d, u_4 = u + 3d$ với công sai là 2d:

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 20 \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} + \dfrac{1}{u_4} = \dfrac{25}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u = 20 \\ \dfrac{1}{u-3d} + \dfrac{1}{u-d} + \dfrac{1}{u+d} + \dfrac{1}{u+3d} = \dfrac{25}{24} \end{cases}$

$$\begin{cases} u=5 \\ \dfrac{1}{5-3d}+\dfrac{1}{5+3d}+\dfrac{1}{5-d}+\dfrac{1}{5+d}=\dfrac{25}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ \dfrac{10}{25-9d^2}+\dfrac{10}{25-d^2}=\dfrac{25}{24} \end{cases} \quad (2)$$

Giải (2): đặt $t=d^2$, điều kiện $t\ge 0$

$$(2)\Leftrightarrow \frac{2}{25-9t}+\frac{2}{25-t}=\frac{5}{24}\Leftrightarrow \frac{100-20t}{(25-9t)(25-t)}=\frac{5}{24}\Leftrightarrow 24(20-4t)=(25-9t)(25-t)$$

$$\Leftrightarrow 9t^2-154t+145=0\Leftrightarrow t=1\vee t=\frac{145}{9}$$

Vì các số hạng là những số nguyên nên chọn t = 1.

Câu 17: Cho a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của một CSC. Chứng minh:

a). a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab cũng là 3 số hạng liên tiếp của một CSC.

b). $2(a+b+c)^3=9\left[a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\right]$

LỜI GIẢI

Vì a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của một CSC. Nen theo tính chất CSC có: $a+c=2b$

a). Ta phải chứng minh: $a^2-bc+c^2-ab=2(b^2-ac)$

$$\Leftrightarrow a^2+c^2-b(a+c)=2b^2-2ac\Leftrightarrow a^2+2ac+c^2-2b^2=2b^2$$

$$\Leftrightarrow (a+c)^2=4b^2\Leftrightarrow 4b^2=4b^2$$ (đúng) (đpcm).

b). Ta có: $9\left[a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\right]=9\left[a^2(3b-a)+2b^3+(2b-a)^2(a+b)\right]$

$$=9\left[3a^2b-a^3+2b^3+(4b^2-4ab+a^2)(a+b)\right]$$

$$=9\left(3a^2b-a^3+2b^3+4ab^2+4b^3-4a^2b-4ab^2+a^3+a^2b\right)=54b^3 \quad (1)$$

Ngoài ra: $2(a+b+c)^3=2(3b)^3=54b^3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Câu 18 : Cho a^2, b^2, c^2 lập thành 1 cấp số cộng có công sai khác không.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{b+c};\dfrac{1}{c+a};\dfrac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

LỜI GIẢI

Theo giả thuyết $a^2+c^2=2b^2$

Ta phải chứng minh: $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{2}{c+a}$

Ta có: $a^2+c^2=b^2+b^2$

$$\Leftrightarrow a^2-b^2=b^2-c^2\Leftrightarrow (a-b)(a+b)=(b-c)(b+c)\Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c}=\frac{b-c}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{(b+c)(c+a)}=\frac{(b-c)}{(a+b)(c+a)}\Leftrightarrow \frac{(a+c)-(b+c)}{(b+c)(c+a)}=\frac{(a+b)-(c+a)}{(a+b)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{(a+c)(c+a)}-\frac{b+c}{(b+c)(c+a)}=\frac{a+b}{(a+b)(c+a)}-\frac{c+a}{(a+b)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}=\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{c+a}$ (đpcm).