6) a,b,c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân và $a, b, c-4$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, đồng thời $a, b-1, c-5$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

LỜI GIẢI

Có a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, nên: $a.c = b^2$.

Có $a, b, c-4$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, nên: $a + c - 4 = 2b$.

Có $a, b-1, c-5$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, nên: $a.(c-5) = (b-1)^2$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a.c = b^2 & (1) \\ a + c - 4 = 2b & (2) \\ a(c-5) = (b-1)^2 & (3) \end{cases}$

Thay (1) vào (3): $b^2 - 5a = b^2 - 2b + 1 \Leftrightarrow -5a = -2b + 1 \Rightarrow b = \frac{5a+1}{2}$

Thay vào (2) được: $a + c - 4 = 5a + 1 \Rightarrow c = 4a + 5$.

Thay b và c theo a vào (1) được: $a(4a+5) = \left(\frac{5a+1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow 16a^2 + 20a = 25a^2 + 10a + 1 \Leftrightarrow 9a^2 - 10a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \;\vee\; a = \frac{1}{9}$

Với $a = 1 \Rightarrow b = 3; c = 9$.

Với $a = \frac{1}{9} \Rightarrow b = \frac{7}{9}; c = \frac{49}{9}$.

7) a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân và $a, b+2, c+9$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, đồng thời $a, b+2, c$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

LỜI GIẢI

Vì a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân nên có: $a.c = b^2$.

Vì $a, b+2, c+9$ là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng, có:

$a + c + 9 = 2(b+2)$.

Vì $a, b+2, c$ là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân,có: $a.c = (b+2)^2$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a.c = b^2 & (1) \\ a + c + 9 = 2(b+2)^2 & (2) \\ a.c = (b+2)^2 & (3) \end{cases}$

Thay (1) vào (3) được: $b^2 = (b+2)^2 \Leftrightarrow b = -1$

thay $b = -1$ vào (1) và (2) được: $\Leftrightarrow \begin{cases} a.c = 1 \\ a + c = -7 \end{cases}$ .Vậy a, c là nghiệm của phương trình: $X^2 + 7X + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-7+3\sqrt{5}}{2} \\ c = \frac{-7-3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a = \frac{-7-3\sqrt{5}}{2} \\ c = \frac{-7+3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Tìm m để phương trình $-x^4 + 2(m+2)x^2 - 2m - 3 = 0$ (i) có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

LỜI GIẢI

- Đặt $t = x^2, \ (t \ge 0)$ thì $(i) \Leftrightarrow g(t) = -t^2 + 2(m+2)t - 2m - 3 \qquad (ii)$
- Để (i) có bốn nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3, x_4 \ (x_1 < x_2 < x_3 < x_4) \Leftrightarrow (ii)$ có hai nghiệm dương phân biệt:

$$\Leftrightarrow 0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 2m + 1 > 0 \\ S = 2m + 4 > 0 \\ P = 2m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{3}{2} \\ m \ne -1 \end{cases} \qquad (*)$$

- Theo Viét: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m + 4 & (1) \\ t_1 t_2 = 2m + 3 & (2) \end{cases}$. Khi đó bốn nghiệm của (i) được xếp theo thứ tự tăng dần là:

$x_1 = -\sqrt{t_2} < x_2 = -\sqrt{t_1} < x_3 = \sqrt{t_1} < x_4 = \sqrt{t_2}$.

- Theo đề x_1, x_2, x_3, x_4 lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1 \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 2m + 4 \\ 9t_1 - t_2 = 0 \\ t_1 t_2 = 2m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{m+2}{5} \\ t_2 = \dfrac{9}{5}(m+2) \\ \dfrac{m+2}{5} \cdot \dfrac{9}{5}(m+2) = 2m + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 14m - 39 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \ \vee \ m = -\frac{13}{9} \qquad \text{(thỏa } (*)\text{)}$$