

$$\text{Đáp án: } P = \frac{2\sqrt{x} - 9}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2)} + \frac{(2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) - (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x} - 9 + 2x - 3\sqrt{x} - 2 - x + 9}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{x - \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$$

b) Khi  $x = 16$  thỏa mãn điều kiện thì  $P = \frac{4+1}{4-3} = 5$

**Câu 45:** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{x\sqrt{x} + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left( \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$  với  $x > 0$  và  $x \neq$

1

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị của x để  $A = 3$

Đáp án: Ta có :

$$A = \left( \frac{x\sqrt{x} + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left( \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) =$$

$$\left( \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} - \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$$

$$A = \left( \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left( \frac{x - \sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$$

$$A = \frac{x - \sqrt{x} + 1 - x + 1}{\sqrt{x} - 1} : \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$$

$$A = \frac{-\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} : \frac{x}{\sqrt{x} - 1} = \frac{-\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{x} = \frac{2 - \sqrt{x}}{x}$$

$$\text{b) } A = 3 \Rightarrow \frac{2 - \sqrt{x}}{x} = 3$$

$$\Rightarrow 3x + \sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow 3 \cdot (\sqrt{x} + 1) \left( \sqrt{x} - \frac{2}{3} \right) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$$

thỏa mãn điều kiện.

Vậy với  $x = \frac{4}{9}$  thì  $A = 3$

**Câu 46:** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x - 1} \right) \cdot \frac{x - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$

a) Rút gọn P.

b) Tìm x để  $P < \frac{1}{2}$ .

Đáp án:

a. Với  $x \geq 0, x \neq 1$  ta có:

$$P = \left( \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x - 1} \right) \cdot \frac{x - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{2\sqrt{x} + 1}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$$

b) Theo phần a ta có  $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ :

Ta có  $P < \frac{1}{2}$  khi và chỉ khi:  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} < \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}+1)} < 0, \text{ (do } 2(\sqrt{x}+1) > 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1$$

Vậy  $0 \leq x < 1$  thì  $P < \frac{1}{2}$

**Câu 47:** Cho biểu thức :  $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn P

b) Tìm x để  $P=2$

c) Tính giá trị của P khi  $x = 3 - 2\sqrt{2}$

Đáp án

a)

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - 2 - 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{3x - 6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{b) } P = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0; x \neq 4 \\ \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2 \end{cases}$$

$$\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2 \Rightarrow 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 4$$

$$\Leftrightarrow x = 16(TM)$$

c)  $x = 3 - 2\sqrt{2}$  thỏa mãn điều kiện xác định nên ta thay  $x = 3 - 2\sqrt{2}$  vào ta được :

$$P = \frac{3\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}+2} = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1+2} = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1} = 3(\sqrt{2}-1)^2$$

**Câu 48:** Cho biểu thức  $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$  với  $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

a. Rút gọn M

b. Tìm x để  $M = 5$

Đáp án:

$$M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$$

a.

Ta có

$$\begin{aligned} M &= \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\sqrt{x}-9+2x-3\sqrt{x}-2-x+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

Vậy  $M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

b) Với  $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$  thì  $M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

Đề  $M = 5 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = 5$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+1 = 5(\sqrt{x}-3) \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 5\sqrt{x}-15 \Leftrightarrow 16 = 4\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow x = 16 \text{ ( Thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy  $x=16$  thì  $M = 5$

**Câu 49:** Cho biểu thức  $Q = \left( \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{9-x} \right) : \left( \frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$  với  $x > 0; x \neq 9$

a) Rút gọn

b) Tìm x sao cho  $Q < -1$

Đáp án:

a) Ta có:

$$\begin{aligned} Q &= \left( \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{9-x} \right) : \left( \frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \left( \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})} \right) : \left( \frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})+x+9}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})} : \frac{3\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{3\sqrt{x}+9}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})} : \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{3(\sqrt{x}+3)}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{2(\sqrt{x}+2)} = \frac{-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+4} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } Q = \frac{-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+4}$$

b) Với  $x > 0; x \neq 9$  thì  $Q = \frac{-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+4}$

Để  $Q < -1$  thì  $\frac{-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+4} < -1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} > 2\sqrt{x}+4 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 4 \Leftrightarrow x > 16$  ( $2\sqrt{x}+4 > 0$ )

$$\frac{-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+4} < -1 \Leftrightarrow \frac{-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+4} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-3\sqrt{x}+2\sqrt{x}+4}{2\sqrt{x}+4} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\sqrt{x}+4}{2\sqrt{x}+4} < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x}+4 < 0 \text{ (do } 2\sqrt{x}+4 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} > 4 \Leftrightarrow x > 16$$

$x > 16$  thỏa mãn điều kiện

Vậy  $x > 16$  thì  $Q < -1$

**Câu 50:** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1} \right) : \left( 2 - \frac{2x-\sqrt{x}}{x+1} \right)$  với  $x \geq 0$

a. Rút gọn A

b. Tìm x để A nhận giá trị nguyên.

Đáp án : a. Với  $x \geq 0$  ta có

$$A = \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{2x+2-2x+\sqrt{x}}{x+1} = \frac{x+1-2}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$$

b.  $A = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+2}$

Để A nguyên thì  $\frac{3}{\sqrt{x}+2}$  nguyên đặt  $\frac{3}{\sqrt{x}+2} = k$  ( $k \in \mathbb{Z}, k > 0$ )

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3-2k}{k} \text{ mà } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{3-2k}{k} \geq 0 \Rightarrow 0 < k \leq \frac{3}{2} \text{ mà } k \text{ nguyên nên } k=1 \Rightarrow$$

$$x=1.$$

Vậy với  $x=1$  thì A nguyên.

- Câu 51:** Tính
- a)  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{16}}$
- b)  $\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{-2}$
- c)  $\sqrt[3]{-0,5} \cdot \sqrt[3]{1,25} \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{10}}$

**Đáp án:**

- a)  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{16}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{16}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$
- b)  $\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{54 : (-2)} = \sqrt[3]{-27} = -3$
- c)  $\sqrt[3]{-0,5} \cdot \sqrt[3]{1,25} \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{10}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5}} = \sqrt[3]{-1} = -1$

- Câu 52:** So sánh
- a) 5 và  $\sqrt[3]{121}$
- b)  $3\sqrt[3]{6}$  và  $6\sqrt[3]{3}$

**Đáp án:**

- a) Ta có  $5 = \sqrt[3]{125} > \sqrt[3]{121} \Rightarrow 5 > \sqrt[3]{121}$
- b)  $3\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{648}$   
 $6\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{648}$  }  $\sqrt[3]{648} > \sqrt[3]{126} \Rightarrow 6\sqrt[3]{3} > 3\sqrt[3]{6}$

**Câu 53:** Rút gọn

- a)  $\sqrt[3]{27a^3} - 4a$  ;                      b)  $\sqrt[3]{-125a^3b^6} - 5b^2$

**Đáp án:**

- a)  $\sqrt[3]{27a^3} - 4a = \sqrt[3]{(3a)^3} - 4a$  ;  
 $= 3a - 4a = -a$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt[3]{-125a^3b^6} - 5b^2 &= \sqrt[3]{(-5ab^2)^3} - 5b^2 \\ &= -5ab^2 - 5b^2 = -5b^2(a+1) \end{aligned}$$

**Câu 54:** Tìm x biết

$$\text{a) } \sqrt[3]{3x-1} = 2; \quad \text{b) } \sqrt[3]{4-2x} - 3 = 0$$

**Đáp án:**

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt[3]{3x-1} = 2 &\Leftrightarrow 3x - 1 = 2^3 \\ &\Leftrightarrow 3x - 1 = 8 \\ &\Leftrightarrow 3x = 9 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt[3]{4-2x} - 3 = 0 & \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{4-2x} = 3 & \\ \Leftrightarrow 4 - 2x = 27 & \\ \Leftrightarrow 2x = -23 & \\ \Leftrightarrow x = \frac{-23}{2} & \end{aligned}$$

**Câu 55.** Rút gọn  $\sqrt[3]{27a} - 10\sqrt[3]{8a} + \sqrt[3]{a}$

Đáp án là :  $-16\sqrt[3]{a}$

**Câu 56 :** Tính  $\sqrt[3]{8\sqrt{5}-16} \cdot \sqrt[3]{8\sqrt{5}+16}$

Đáp án là : 4

**Câu 57 :** Trục căn thức ở mẫu  $\frac{2}{\sqrt[3]{2}-1}$



Đáp án là :  $2(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)$

**Câu 58 :** Giải pt :  $\sqrt[3]{x-1} = 2$

Đáp án là :  $x=9$

**Câu 59:** Rút gọn biểu thức:  $B = \frac{1}{xy^2} \sqrt[3]{-8x^3y^6}$

Đáp án:  $B = \frac{1}{xy^2} \sqrt[3]{(-xy^2)^3} = -\frac{2xy^2}{xy^2} = 2$

**Câu 60:** Tìm x biết:  $\sqrt[3]{2x-1} > -3$

Đáp án: Ta có  $\sqrt[3]{2x-1} > -3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-1} > \sqrt[3]{-27}$   
 $\Leftrightarrow 2x-1 > -27$   
 $\Leftrightarrow x > -13$

**Câu 61:** Rút gọn  $C = (\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)$

Đáp án : ta có  $C = (\sqrt[3]{2})^3 - 1^3 = 2 - 1 = 1$

## BÀI TẬP VẬN DỤNG CAO

**Câu 1:** Chứng minh:  $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}} = 3$

Đáp án: Đặt  $x = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}} > 0$

Ta có  $x^2 = 6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}} = 6 + x \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

**Câu 2:** Chứng minh số  $\sqrt{2016^2 + 2016^2 \cdot 2017^2 + 2017^2}$  là một số nguyên.

Đáp án:  $\sqrt{2016^2 + 2016^2 \cdot 2017^2 + 2017^2} = \dots = \sqrt{(2016 \cdot 2017 + 1)^2} = 2016 \cdot 2017 + 1 = 4066273$

**Câu 3:** Giải phương trình:  $\sqrt{x^2 - 6x + 10} + \sqrt{4x^2 - 24x + 45} = -x^2 + 6x - 5$

Đáp án: Ta có:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 10} + \sqrt{4x^2 - 24x + 45} = \sqrt{(x-3)^2 + 1} + \sqrt{4(x-3)^2 + 9} \geq 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi  $x = 3$

$-x^2 + 6x - 5 = -(x-3)^2 + 4 \leq 4$ . Dấu bằng xảy ra khi  $x = 3$

Vậy  $x = 3$  là nghiệm duy nhất của phương trình.

**Câu 4:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 4}$

**Đáp án:**  $A = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = |1-x| + |x+2| \geq |1-x+x+2| = 3$

Dấu = xảy ra khi  $(1-x)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $A = 3$  khi  $-2 \leq x \leq 1$

**Câu 5:** Giải phương trình  $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 2$

Đáp án: Điều kiện:  $x \geq -\frac{1}{4}$

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 2 \Leftrightarrow x + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} = 2$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = 2 \quad (\text{Do } \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = \sqrt{2} \quad (\text{Do } \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{4} = 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2} \quad (\text{Thỏa mãn})$$

**Câu 6:** Giải phương trình  $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = -x^2 + 4x - 2$

---

Đáp án: Điều kiện:  $x \geq 1$ . Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} &= \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} \\ &= |1-\sqrt{x-1}| + |\sqrt{x-1}+1| \geq |1-\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}+1| = 2 \end{aligned}$$

Dấu = xảy ra khi

$$\begin{cases} (1-\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1}+1) \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x-1} \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq \sqrt{x-1} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

Ta có:  $-x^2+4x-2 = -(x-2)^2+2 \leq 2$

Dấu = xảy ra khi  $x=2$

Vậy  $x=2$  là nghiệm duy nhất của phương trình.  $-x^2+4x-2 = -(x-2)^2+2 \leq 2$

**Câu 7.** Tính  $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

Đáp án:  $\sqrt{3}-1$

**Câu 8** Tính  $A = 4 + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}$

Đáp án: 7

**Câu 9.** So sánh:  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  và 3

Đáp án:  $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$

**Câu 10.** Chứng minh  $(\sqrt{2008}-\sqrt{2007})$  và  $(\sqrt{2008}+\sqrt{2007})$  là hai số nghịch đảo của nhau

Đáp án: Tính được  $(\sqrt{2008}-\sqrt{2007}) \cdot (\sqrt{2008}+\sqrt{2007}) = 2008-2007 = 1$

**Câu 11.** Cho biết  $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5} = 5$  ( $x \geq 5$ ), tính  $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5}$

Đáp án: Ta có

$$(\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5}) \cdot (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5}) = x+5 - (x-5) = 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+5} + \sqrt{x-5} = 2$$

**Câu 12.** Cho biểu thức  $\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ . Hãy tính giá trị của A

Đáp án:  $2\sqrt{3}$

**Câu 13:** Cho hai số thực x và y thỏa mãn  $x + y = 15$ .

Tìm GTLN và GTNN của biểu thức:  $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{y-3}$

Đáp án:

$$\text{ĐKXD: } x \geq 4; y \geq 3$$

Tìm min A:

Áp dụng bất đẳng thức với  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$  với  $a \geq 0, b \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi  $a=0$  hoặc  $b=0$

$$\text{Ta có } \sqrt{x-4} + \sqrt{y-3} \geq \sqrt{x-4+y-3}$$

$$\text{Hay } A \geq \sqrt{8}$$

Dấu bằng xảy ra khi  $x=4$  và  $y=11$  hoặc  $x=12$  và  $y=3$

Vậy min A =  $\sqrt{8}$  khi  $x=4$  và  $y=11$  hoặc  $x=12$  và  $y=3$

Tìm max A:

$$\text{Xét } A^2 = x+y - 7 + 2\sqrt{(x-4)(y-3)} \leq 8 + x - 4 + y - 3$$

Hay  $A^2 \leq 16 \Rightarrow A \leq 4$

$A=4$  khi  $x-4=y-3$  và  $x+y=15 \Rightarrow x=8; y=7$

Vậy  $\max A = 4$  khi  $x=8$  và  $y=7$

**Câu 14:** Cho  $a > c; b > c; c > 0$ . Chứng minh:  $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$

Đáp án:

Do  $a > c; b > c; c > 0$ .

Nên:  $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow c(a-c) + c(b-c) + 2\sqrt{c^2(a-c)(b-c)} \leq ab$$

$$\Leftrightarrow ac + bc - 2c^2 + 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} \leq ab \quad (\forall c > 0)$$

$$\Leftrightarrow c^2 - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} + ab - ac + c^2 - bc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow c^2 - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} + a(b-c) - c(b-c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow c^2 - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} + (a-c)(b-c) \geq 0 \Leftrightarrow [c - \sqrt{(a-c)(b-c)}]^2 \geq 0$$

(đúng)

$$\text{Vậy } \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

**Câu 15:** a) Chứng minh:  $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

b) Áp dụng: tìm  $x$  để  $A = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$  đạt giá trị lớn nhất.

Đáp án

a) Ta luôn có:  $(a+b)^2 \leq (a+b)^2 + (a-b)^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow |a+b| \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

$$\text{Mà } a+b \leq |a+b| \text{ nên } a+b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

b) Áp dụng  $A \leq \sqrt{2(x-3+5-x)} = 2$

$$\text{Min } A = 2 \Leftrightarrow x = 4$$

**Câu 16:** Giải phương trình:  $\sqrt{9x^2 - 24x + 16} = -x + 4$  (1)

Đáp án:

ĐKXD:  $9x^2 - 24x + 16 \geq 0 \Leftrightarrow (3x - 4)^2 \geq 0$  luôn đúng với mọi x

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow |3x - 4| = -x + 4$$

Với  $-x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$ , ta có:

$$\begin{cases} 3x - 4 = -x + 4 \\ 3x - 4 = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm  $x = 0$ ;  $x = 2$ .

**Câu 17:** Giải phương trình  $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$  (1)

Đáp án: Điều kiện  $x \geq \frac{3}{2}$ .

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = 4x - 4 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (Loại vì không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

**Câu 18:** Cho  $A = \frac{1}{x - 2\sqrt{x} + 3}$  ( $x \geq 0$ )

Tìm giá trị lớn nhất của A, giá trị đó đạt được khi x bằng bao nhiêu?

Đáp án

$$\text{Ta có } x - 2\sqrt{x} + 3 = (\sqrt{x} - 1)^2 + 2$$