CHƯƠNG IV: BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

I. BẤT ĐẲNG THỨC

1. Bất đẳng thức

*Ta gọi hệ thức dạng $a < b$ (hay $a > b$, $a \le b$, $a \ge b$) là **bất đẳng thức** và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.*

2. Tính chất

Điều kiện	Nội dung	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	(1)
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	(2a)
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	(2b)
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	(3)
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	(4)
n nguyên dương	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	(5a)
	$0 < a < b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}$	(5b)
$ab > 0$	$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	(6a)
$ab < 0$	$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	(6b)

3. Một số bất đẳng thức thông dụng

a) $a^2 \ge 0, \forall a$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$.

$a^2 + b^2 \ge 2ab$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

b) Bất đẳng thức Cô–si:

Với $a, b \ge 0$, ta có: $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Hệ quả: *– Nếu $x, y > 0$ có $S = x + y$ không đổi thì $P = xy$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$.*

– Nếu $x, y > 0$ có $P = x\,y$ không đổi thì $S = x + y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y$.

c) Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

Điều kiện	Nội dung
	$\lvert x\rvert \ge 0, \lvert x\rvert \ge x, \lvert x\rvert \ge -x$
$a > 0$	$\lvert x\rvert \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$
	$\lvert x\rvert \ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -a \\ x \ge a \end{array}\right.$
	$\lvert\lvert a\rvert - \lvert b\rvert\rvert \le \lvert a+b\rvert \le \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$

d) Bất đẳng thức về các cạnh của tam giác

Với a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác, ta có:

+ $a, b, c > 0$.

+ $\lvert a-b\rvert < c < a+b$; $\lvert b-c\rvert < a < b+c$; $\lvert c-a\rvert < b < c+a$.

4. Chứng minh bất đẳng thức

Chứng minh một BĐT là lập luận để khẳng định tính đúng đắn của BĐT đó.

Để chứng minh một BĐT ta thường sử dụng:

– Tính chất của quan hệ thứ tự các số.

– Tính chất của bất đẳng thức.

– *Một số BĐT thông dụng.*

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh BĐT dựa vào định nghia và tính chất cơ bản

• *Để chứng minh một BĐT ta có thể sử dụng các cách sau:*
– *Biến đổi BĐT cần chứng minh tương đương với một BĐT đã biết.*
– *Sử dụng một BĐT đã biết, biến đổi để dẫn đến BĐT cần chứng minh.*
• *Một số BĐT thường dùng:*

$+\ A^2 \ge 0$ $\quad +\ A^2 + B^2 \ge 0$ $\quad +\ A.B \ge 0$ *với* $A, B \ge 0$. $\quad +\ A^2 + B^2 \ge 2AB$

Chú ý:
– *Trong quá trình biến đổi, ta thường chú ý đến các hằng đẳng thức.*
– *Khi chứng minh BĐT ta thường tìm điều kiện để dấu đẳng thức xảy ra. Khi đó ta có thể tìm GTLN, GTNN của biểu thức.*

Bài 1. Cho $a, b, c, d, e \in R$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ b) $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b$

c) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \ge 2(a + b + c)$ d) $a^2 + b^2 + c^2 \ge 2(ab + bc - ca)$

e) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \ge 2a(ab^2 - a + c + 1)$ f) $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \ge ab - ac + 2bc$

g) $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \ge 6abc$ h) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \ge a(b + c + d + e)$

HD: a) $\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \ge 0$ *b)* $\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \ge 0$

c) $\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \ge 0$ *d)* $\Leftrightarrow (a - b + c)^2 \ge 0$

e) $\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (a - c)^2 + (a - 1)^2 \ge 0$ *f)* $\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - (b - c)\right)^2 \ge 0$

g) $\Leftrightarrow (a - bc)^2 + (b - ca)^2 + (c - ab)^2 \ge 0$

h) $\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \ge 0$

Bài 2. Cho $a, b, c \in R$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $ab \le \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2 + b^2}{2}$ b) $\frac{a^3 + b^3}{2} \ge \left(\frac{a + b}{2}\right)^3$; với *a, b ≥ 0*

c) $a^4 + b^4 \ge a^3b + ab^3$ d) $a^4 + 3 \ge 4a$

e) $a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc$, với *a, b, c* > 0. f) $a^4 + b^4 \le \frac{a^6}{b^2} + \frac{b^6}{a^2}$; với *a, b ≠ 0.*

g) $\frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} \ge \frac{2}{1 + ab}$; với $ab \ge 1$. h) $(a^5 + b^5)(a + b) \ge (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)$; với *ab > 0.*

HD: a) $\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - ab = \frac{(a - b)^2}{4} \ge 0$; $\frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = \frac{(a - b)^2}{4} \ge 0$

b) $\Leftrightarrow \frac{3}{8}(a + b)(a - b)^2 \ge 0$ *c)* $\Leftrightarrow (a^3 - b^3)(a - b) \ge 0$ *d)* $\Leftrightarrow (a - 1)^2(a^2 + 2a + 3) \ge 0$

e) Chú ý: $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$.

BĐT $\Leftrightarrow (a + b + c)\left[a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)\right] \ge 0$.

f) $\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2(a^4+a^2b^2+b^4)\ge 0$ *g)* $\Leftrightarrow \dfrac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)}\ge 0$

h) $\Leftrightarrow ab(a-b)(a^3-b^3)\ge 0$.

Bài 3. Cho *a, b, c, d* $\in R$. Chứng minh rằng $a^2+b^2\ge 2ab$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^4+b^4+c^4+d^4\ge 4abcd$ b) $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\ge 8abc$

c) $(a^2+4)(b^2+4)(c^2+4)(d^2+4)\ge 256abcd$

HD: a) $a^4+b^4\ge 2a^2b^2$; $c^2+d^2\ge 2c^2d^2$; $a^2b^2+c^2d^2\ge 2abcd$

b) $a^2+1\ge 2|a|$; $b^2+1\ge 2|b|$; $c^2+1\ge 2|c|$

c) $a^2+4\ge 4|a|; b^2+4\ge 4|b|; c^2+4\ge 4|c|; d^2+4\ge 4|d|$

Bài 4. Cho *a, b, c, d > 0*. Chứng minh rằng nếu $\dfrac{a}{b}<1$ thì $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+c}$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $1<\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2$ b) $1<\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{b}{b+c+d}+\dfrac{c}{c+d+a}+\dfrac{d}{d+a+b}<2$

c) $2<\dfrac{a+b}{a+b+c}+\dfrac{b+c}{b+c+d}+\dfrac{c+d}{c+d+a}+\dfrac{d+a}{d+a+b}<3$

HD: BĐT (1) $\Leftrightarrow$ *(a – b)c < 0.*

a) Sử dụng (1), ta được: $\dfrac{a}{a+b+c}<\dfrac{a}{a+b}<\dfrac{a+c}{a+b+c}$; $\dfrac{b}{a+b+c}<\dfrac{b}{b+c}<\dfrac{b+a}{a+b+c}$;

$$\dfrac{c}{a+b+c}<\dfrac{c}{c+a}<\dfrac{c+b}{a+b+c}.$$

Cộng các BĐT vế theo vế, ta được đpcm.

b) Sử dụng tính chất phân số, ta có: $\dfrac{a}{a+b+c+d}<\dfrac{a}{a+b+c}<\dfrac{a}{a+c}$

Tương tự: $\dfrac{b}{a+b+c+d}<\dfrac{b}{b+c+d}<\dfrac{b}{b+d}$; $\dfrac{c}{a+b+c+d}<\dfrac{c}{c+d+a}<\dfrac{c}{a+c}$;

$$\dfrac{d}{a+b+c+d}<\dfrac{d}{d+a+b}<\dfrac{d}{d+b}$$

Cộng các BĐT vế theo vế ta được đpcm.

c) Chứng minh tương tự câu b). Ta có: $\dfrac{a+b}{a+b+c+d}<\dfrac{a+b}{a+b+c}<\dfrac{a+b+d}{a+b+c+d}$

Cùng với 3 BĐT tương tự, ta suy ra đpcm.

Bài 5. Cho *a, b, c* $\in R$. Chứng minh bất đẳng thức: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$ b) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$

c) $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ d) $a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$

HD: $\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$.

a) Khai triển, rút gọn, đưa về (1) *b, c) Vận dụng a)* *d) Sử dụng (1) hai lần*

Bài 6. Cho *a, b* ≥ 0 . Chứng minh bất đẳng thức: $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a=ab(a+b)$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\le\dfrac{1}{abc}$; với *a*, *b*, *c* > 0.

b) $\dfrac{1}{a^3+b^3+1}+\dfrac{1}{b^3+c^3+1}+\dfrac{1}{c^3+a^3+1}\le 1$; với *a*, *b*, *c* > 0 và *abc* = 1.

c) $\dfrac{1}{a+b+1}+\dfrac{1}{b+c+1}+\dfrac{1}{c+a+1}\le 1$; với *a*, *b*, *c* > 0 và *abc* = 1.

HD: (1) $\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a-b)\ge 0$.

a) Từ (1) $\Rightarrow a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c) \Rightarrow \dfrac{1}{a^3+b^3+abc}\le\dfrac{1}{ab(a+b+c)}$.

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng vế theo vế, ta suy ra đpcm.

b, c) Sử dụng a).

Bài 7. Cho *a*, *b*, *c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh:

a) $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$

b) $abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$

c) $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4>0$

d) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2>a^3+b^3+c^3$

HD: a) Sử dụng BĐT tam giác, ta có: $a>|b-c|\Rightarrow a^2>b^2-2bc+c^2$.

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng vế theo vế, ta suy ra đpcm.

b) Ta có: $a^2>a^2-(b-c)^2\Rightarrow a^2>(a+b-c)(a-b+c)$.

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng vế theo vế, ta suy ra đpcm.

c) $\Leftrightarrow (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$.

d) $\Leftrightarrow (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$.

Bài 8. Cho *a*, *b*, *c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh:

a) $\dfrac{1}{a+b};\dfrac{1}{b+c};\dfrac{1}{c+a}$ cũng là độ dài các cạnh của một tam giác khác.

b) $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}>\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

HD: a) Sử dụng tính chất phân số và BĐT các cạnh trong tam giác.

Ta có: $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}>\dfrac{1}{a+b+c}+\dfrac{1}{a+b+c}>\dfrac{2}{c+a+c+a}=\dfrac{1}{c+a}$

Tương tự, chứng minh các BĐT còn lại.

b) Sử dụng BĐT: Với x > 0, y > 0 ta có: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$.

Ta có: $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}\ge\dfrac{4}{(a+b-c)+(b+c-a)}=\dfrac{2}{b}$.

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng vế theo vế, ta suy ra đpcm.

VẤN ĐỀ 2: Phương pháp làm trội

Dùng các tính chất của bất đẳng thức để đưa một vế của bất đẳng thức về dạng tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn.

• ***Phương pháp chung để tính tổng hữu hạn:*** $S = u_1 + u_2 + ... + u_n$

Ta biến đổi số hạng tổng quát u_k *về hiệu của hai số hạng liên tiếp nhau:* $u_k = a_k - a_{k+1}$

Khi đó: $S = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + ... + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$

• ***Phương pháp chung về tính tích hữu hạn:*** $P = u_1 u_2 .... u_n$

Ta biến đổi các số hạng u_k *về thương của hai số hạng liên tiếp nhau:* $u_k = \dfrac{a_k}{a_{k+1}}$

Khi đó: $P = \dfrac{a_1}{a_2} . \dfrac{a_2}{a_3} ..... \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{a_1}{a_{n+1}}$

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$, ta có:

a) $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n} < \dfrac{3}{4}$

b) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$

c) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2} < 2$

d) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{(n-1).n} < 1$

HD: a) Ta có: $\dfrac{1}{n+k} > \dfrac{1}{n+n} = \dfrac{1}{2n}$, *với* $k = 1, 2, 3, ..., n-1$.

b) Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{k}} = \dfrac{2}{2\sqrt{k}} > \dfrac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$, *với* $k = 1, 2, 3, ..., n$.

c) Ta có: $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, *với* $k = 2, 3, ..., n$.

d) Ta có: $\dfrac{1}{(k-1).n} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, *với* $k = 2, 3, ..., n$.

VẤN ĐỀ 3: Chứng minh BĐT dựa vào BĐT Cô–si

1. Bất đẳng thức Cô–si:

+ Với $a, b \geq 0$, *ta có:* $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow a = b$.

2. Ứng dụng tìm GTLN, GTNN:

+ Nếu $x, y > 0$ *có* $S = x + y$ *không đổi thì* $P = xy$ *lớn nhất* $\Leftrightarrow x = y$.

+ Nếu $x, y > 0$ *có* $P = x\,y$ *không đổi thì* $S = x + y$ *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow x = y$.

Bài 1. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

b) $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c} \ge a+b+c$; với *a, b, c > 0.*

c) $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \le \frac{a+b+c}{2}$; với *a, b, c > 0.*

d) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$; với *a, b, c > 0.*

HD: a) $a+b \ge 2\sqrt{ab};\ b+c \ge 2\sqrt{bc};\ c+a \ge 2\sqrt{ca}\ \Rightarrow$ *đpcm.*

b) $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \ge 2\sqrt{\frac{abc^2}{ab}}=2c$, $\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c} \ge 2\sqrt{\frac{a^2bc}{bc}}=2a$, $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a} \ge 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}}=2b \Rightarrow$ *đpcm*

c) Vì $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ *nên* $\frac{ab}{a+b} \le \frac{ab}{2\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{2}$. *Tương tự:* $\frac{bc}{b+c} \le \frac{\sqrt{bc}}{2};\ \frac{ca}{c+a} \le \frac{\sqrt{ca}}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \le \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{2} \le \frac{a+b+c}{2}\quad (\text{vì } \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \le a+b+c)$$

d) VT = $\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3$

$$= \frac{1}{2}\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3 \ge \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

• *Cách khác: Đặt x =b + c, y = c + a, z = a + b.*

Khi đó, VT = $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)-3\right] \ge \frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}$.

Bài 2. Cho *a, b, c > 0*. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge (a+b+c)^2$

b) $3(a^3+b^3+c^3) \ge (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$ c) $9(a^3+b^3+c^3) \ge (a+b+c)^3$

HD: a) VT = $a^2+b^2+c^2+\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\right)+\left(\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{b}\right)+\left(\frac{c^3}{a}+\frac{a^3}{c}\right)$.

Chú ý: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a} \ge 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$. *Cùng với 2 BĐT tương tự ta suy ra đpcm.*

b) $\Leftrightarrow 2(a^3+b^3+c^3) \ge \left(a^2b+b^2a\right)+\left(b^2c+bc^2\right)+\left(c^2a+ca^2\right)$.

Chú ý: $a^3+b^3 \ge ab(a+b)$. *Cùng với 2 BĐT tương tự ta suy ra đpcm.*

c) Áp dụng b) ta có: $9(a^3+b^3+c^3) \ge 3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

Dễ chứng minh được: $3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2\ \Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 3. Cho *a, b > 0*. Chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$ (1). Áp dụng chứng minh các BĐT sau:

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$; với *a, b, c > 0.*

b) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \ge 2\left(\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\right)$; với *a, b, c > 0.*

c) Cho *a, b, c > 0* thoả $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$. Chứng minh: $\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c} \le 1$

d) $\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ca}{c+a}\le\dfrac{a+b+c}{2}$; với *a, b, c > 0.*

e) Cho *x, y, z > 0* thoả $x+2y+4z=12$. Chứng minh: $\dfrac{2xy}{x+2y}+\dfrac{8yz}{2y+4z}+\dfrac{4xz}{4z+x}\le 6$.

f) Cho *a, b, c* là độ dài ba cạnh của một tam giác, *p* là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

HD: (1) $\Leftrightarrow (a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\ge 4$. *Hiển nhiển suy từ BĐT Cô–si.*

a) Áp dụng (1) ba lần ta được: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b};\ \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{4}{b+c};\ \dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\ge\dfrac{4}{c+a}$.

Cộng các BĐT vế theo vế ta được đpcm.

b) Tương tự câu a).

c) Áp dụng a) và b) ta được: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 4\left(\dfrac{1}{2a+b+c}+\dfrac{1}{a+2b+c}+\dfrac{1}{a+b+2c}\right)$.

d) Theo (1): $\dfrac{1}{a+b}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\Leftrightarrow\dfrac{ab}{a+b}\le\dfrac{1}{4}(a+b)$.

Cùng với các BĐT tương tự, cộng vế theo vế ta được đpcm.

e) Áp dụng câu d) với a = x, b = 2y, c = 4z thì $a+b+c=12\Rightarrow$ *đpcm.*

f) Nhận xét: (p –a) + (p – b) = 2p – (a + b) = c.

Áp dụng (1) ta được: $\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}\ge\dfrac{4}{(p-a)+(p-b)}=\dfrac{4}{c}$.

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 4. Cho *a, b, c > 0*. Chứng minh $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}$ (1). Áp dụng chứng minh các BĐT sau:

a) $(a^2+b^2+c^2)\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right)\ge\dfrac{3}{2}(a+b+c)$.

b) Cho *x, y, z > 0* thoả $x+y+z=1$. Tìm GTLN của biểu thức: P = $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1}+\dfrac{z}{z+1}$.

c) Cho *a, b, c > 0* thoả $a+b+c\le 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}.$$

d) Cho *a, b, c > 0* thoả $a+b+c=1$. Chứng minh: $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\ge 30$.

HD: Ta có: (1) $\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9$. *Dễ dàng suy từ BĐT Cô–si.*

a) Áp dụng (1) ta được: $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\ge\dfrac{9}{2(a+b+c)}$.

$$\Rightarrow VT\ge\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)}=\frac{3}{2}.\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$$

Chú ý: $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$.

b) Để áp dụng (1), ta biến đổi P như sau:

$$P = \frac{x+1-1}{x+1} + \frac{y+1-1}{y+1} + \frac{z+1-1}{z+1} = 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right)$$

Ta có: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \ge \frac{9}{x+y+z+3} = \frac{9}{4}$. *Suy ra:* $P \le 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

Chú ý: Bài toán trên có thể tổng quát như sau:

Cho x, y, z > 0 thoả $x+y+z=1$ *và k là hằng số dương cho trước. Tìm GTLN của biểu thức:* $P = \frac{x}{kx+1} + \frac{y}{ky+1} + \frac{z}{kz+1}$.

c) *Ta có:* $P \ge \frac{9}{a^2+2bc+b^2+2ca+c^2+2ab} = \frac{9}{(a+b+c)^2} \ge 9$.

d) $VT \ge \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca}$

$$= \left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca}\right) + \frac{7}{ab+bc+ca}$$

$$\ge \frac{9}{(a+b+c)^2} + \frac{7}{ab+bc+ca} \ge \frac{9}{1} + \frac{7}{\frac{1}{3}} = 30$$

Chú ý: $ab+bc+ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}$.

Bài 5. Áp dụng BĐT Cô–si để tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x};\ x > 0$.

b) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1};\ x > 1$.

c) $y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{x+1};\ x > -1$.

d) $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{2x-1};\ x > \frac{1}{2}$

e) $y = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x};\ 0 < x < 1$

f) $y = \frac{x^3+1}{x^2};\ x > 0$

g) $y = \frac{x^2+4x+4}{x};\ x > 0$

h) $y = x^2 + \frac{2}{x^3};\ x > 0$

HD: a) Miny = 6 khi x = 6

b) Miny = $\frac{3}{2}$ *khi x = 3*

c) Miny = $\sqrt{6} - \frac{3}{2}$ *khi x =* $\frac{\sqrt{6}}{3} - 1$

d) Miny = $\frac{\sqrt{30}+1}{3}$ *khi x =* $\frac{\sqrt{30}+1}{2}$

e) Miny = $2\sqrt{5}+5$ *khi* $x = \frac{5-\sqrt{5}}{4}$

f) Miny = $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ *khi x =* $\sqrt[3]{2}$

g) Miny = 8 khi x = 2

h) Miny = $\frac{5}{\sqrt[5]{27}}$ *khi x =* $\sqrt[5]{3}$

Bài 6. Áp dụng BĐT Cô–si để tìm GTLN của các biểu thức sau:

a) $y = (x+3)(5-x);\ -3 \le x \le 5$

b) $y = x(6-x);\ 0 \le x \le 6$

c) $y = (x+3)(5-2x);\ -3 \le x \le \frac{5}{2}$

d) $y = (2x+5)(5-x);\ -\frac{5}{2} \le x \le 5$

e) $y=(6x+3)(5-2x);\ -\frac{1}{2}\le x\le\frac{5}{2}$ f) $y=\frac{x}{x^2+2};\ x>0$

HD: a) Maxy = 16 khi x = 1 *b) Maxy = 9 khi x = 3*

c) Maxy = $\frac{121}{8}$ *khi x =* $-\frac{1}{4}$ *d) Maxy =* $\frac{625}{8}$ *khi x =* $\frac{5}{4}$

e) Maxy = 9 khi x = 1 *f) Maxy =* $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ *khi x =* $\sqrt{2}$ $(2+x^2\ge 2\sqrt{2}x)$

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

1. Định nghĩa

Bất phương trình dạng $ax+b<0$ *(hoặc* $ax+b>0, ax+b\le 0, ax+b\ge 0$*), trong đó a, b là hai số đã cho, a ≠ 0, đgl* ***bất phương trình bậc nhất một ẩn****.*

2. Hai qui tắc biến đổi bất phương trình

• ***Qui tắc chuyển vế****: Khi chuyển một hạng tử của bất phương trình từ vế này sang vế kia ta phải* ***đổi dấu*** *hạng tử đó.*

• ***Qui tắc nhân****: Khi nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải:*

– ***Giữ nguyên chiều*** *bất phương trình nếu* ***số đó dương****.*

– ***Đổi chiều*** *bất phương trình nếu* ***số đó âm****.*

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $3(2x-3)\ge 4(2-x)+13$ b) $6x-1-(3x+9)\le 8x-7-(2x-1)$

c) $8x+17-3(2x+3)\le 10(x+2)$ d) $17(x+5)+41x\ge -15(x+4)-1$

e) $4(2-3x)-(5-x)>11-x$ f) $2(3-x)-1,5(x-4)<3-x$

ĐS: a) $x\ge 3$ *b)* $x\ge -\frac{4}{3}$ *c)* $x\ge -\frac{3}{2}$ *d)* $x\ge -\frac{83}{73}$ *e)* $x<-\frac{4}{5}$ *f)* $x>\frac{18}{5}$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{2x-1}{3}<\frac{x+6}{2}$ b) $\frac{5(x-1)}{6}-1\ge\frac{2(x+1)}{3}$

c) $2+\frac{3(x+1)}{8}\le 3-\frac{x-1}{4}$ d) $\frac{3x+5}{2}-1\le\frac{x+2}{3}+x$

e) $\frac{\frac{1}{4}x-\frac{2}{5}}{3}-\frac{2x-\frac{1}{3}}{5}<\frac{\frac{1}{3}x-\frac{3}{5}}{2}$ f) $\frac{2x-5}{6}+\frac{22-7x}{4}>\frac{5-2x}{3}-x-\frac{5x+2}{4}$

ĐS: a) $x<20$ *b)* $x\ge 15$ *c)* $x\le\frac{9}{5}$ *d)* $x\le -5$ *e)* $x>\frac{14}{19}$ *f)* $x<\frac{5}{2}$

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $(2x+3)(2x-1)>4x(x+2)$ b) $5(x-1)-x(7-x)<x^2$

c) $(x-1)^2+(x-3)^2>x^2+(x+1)^2$ d) $\frac{(2x-1)^2}{8}<\frac{(3-x)^2}{2}$

e) $\frac{(x-2)^2}{5}+\frac{3(x-1)^2}{10}<\frac{x^2+1}{2}$ f) $\frac{x(1,5x+1)}{6}-\frac{(2-x)^2}{4}\ge\frac{5x}{2}-2$

ĐS: a) $x < -\frac{3}{4}$ *b)* $x > -\frac{5}{2}$ *c)* $x < \frac{9}{10}$ *d)* $x < \frac{7}{4}$ *e)* $x > \frac{3}{7}$ *f)* $x \le 2$

Bài 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $8x - 3 < 5\left(\frac{8x}{5} + 3\right)$ b) $2x + \frac{2x+1}{2} > 3x - \frac{1}{5}$

c) $\frac{x+5}{6} + \frac{x-1}{3} \le \frac{x+3}{2} - 1$ d) $x - \frac{5x}{6} - 3 > \frac{x}{3} - \frac{x}{6}$

e) $\frac{x+7}{15} > \frac{2x}{5} - \frac{x}{3} + \frac{7}{15}$

ĐS: a) x tuỳ ý b) x tuỳ ý c) x tuỳ ý d) vô nghiệm e) vô nghiệm

Bài 5. Với những giá trị nào của *x* thì:

a) Giá trị của biểu thức $7 - 3(x+1)$ không nhỏ hơn giá trị của biểu thức $2(x-3) - 4$.

b) Giá trị của biểu thức $\frac{x+2}{3} - x + 1$ lớn hơn giá trị của biểu thức $x + 3$.

c) Giá trị của biểu thức $(x+1)^2 - 4$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $(x-3)^2$.

d) Giá trị của biểu thức $x - \frac{1 - \frac{3}{2}x}{4}$ nhỏ hơn giá trị của biểu thức $\frac{2 - \frac{1}{4}x}{3} + 2$.

ĐS: a) $x \le \frac{14}{5}$ *b)* $x < -2$ *c)* $x \le \frac{3}{2}$ *d)* $x < 2$.

Bài 6. Giải các bất phương trình sau: (*Biến đổi đặc biệt*)

a) $\frac{x+1987}{2002} + \frac{x+1988}{2003} > \frac{x+1989}{2004} + \frac{x+1990}{2005}$ b) $\frac{x-1}{99} + \frac{x-3}{97} + \frac{x-5}{95} < \frac{x-2}{98} + \frac{x-4}{96} + \frac{x-6}{94}$

c) $\frac{x-1987}{2002} + \frac{x-1988}{2003} > \frac{x-1989}{2004} + \frac{x-1990}{2005}$ d) $\frac{x+1}{99} + \frac{x+3}{97} + \frac{x+5}{95} < \frac{x+2}{98} + \frac{x+4}{96} + \frac{x+6}{94}$

ĐS: a) $x > 15$ *b)* $x > 100$

Bài 7.

a) Một số có hai chữ số có chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2. Tìm số đó biết rằng nó lớn hơn 21 nhưng nhỏ hơn 36.

b) Tìm số nguyên nằm trong khoảng từ 300 đến 400, biết số đó chia cho 3, 4, 5 đều có số dư là 1.

c) Tìm số nguyên nằm trong khoảng từ 500 đến 600, biết số đó chia cho 5, 8, 10 có các số dư lần lượt là 2, 5, 7.

ĐS: a) 31 *b)* 301 ($x-1$ *chia hết cho 3, 4, 5)* *c)* 557 ($x+3$ *chia hết cho 5, 8, 10)*

Bài 8. Giải các bất phương trình sau:

a)

III. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. Định nghĩa giá trị tuyệt đối

$$|a| = \begin{cases} a & khi\ a \ge 0 \\ -a & khi\ a < 0 \end{cases}$$

2. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

- ***Dạng*** $|A| = B \overset{C_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A \ge 0 \\ A = B \end{cases}$ *hay* $\begin{cases} A < 0 \\ -A = B \end{cases} \overset{C_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} B \ge 0 \\ A = B \end{cases}$ *hay* $\begin{cases} B \ge 0 \\ A = -B \end{cases}$
- ***Dạng*** $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B\ hay\ A = -B$
- ***Dạng phương trình có chứa nhiều dấu giá trị tuyệt đối***

  – Xét dấu các biểu thức chứa ẩn nằm trong dấu GTTĐ.

  – Chia trục số thành nhiều khoảng sao cho trong mỗi khoảng, các biểu thức nói trên có dấu xác định.

  – Xét từng khoảng, khử các dấu GTTĐ, rồi giải PT tương ứng trong trường hợp đó.

  – Kết hợp các trường hợp đã xét, suy ra số nghiệm của PT đã cho.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $|-4x| = x + 2$ b) $|2 - x| = 2 - 3x$ c) $|2x - 3| = 5x - 6$

d) $2x - |6x - 7| = -x + 8$ e) $\left|\dfrac{1-5x}{3}\right| = 6 - 5x$ f) $\dfrac{|x+2|}{2} - \dfrac{|x-1|}{3} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{x+3}{6}$

ĐS: a) $S = \left\{-\dfrac{2}{5}; \dfrac{2}{3}\right\}$ *b)* $S = \{0\}$ *c)* $S = \left\{\dfrac{9}{7}\right\}$ *d)* $S = \varnothing$ *e)* $S = \left\{\dfrac{19}{20}\right\}$ *f)* $S = \left\{\dfrac{1}{8}\right\}$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $|x^2 - 2x| = x$ b) $|2x^2 - 5x + 3| = -2x^2 + 2$ c) $|x^2 + 4x - 5| = x^2 - 1$

d) $|3x^2 - 7x + 2| = -x^2 + 5x - 6$

ĐS: a) $S = \{0;1;3\}$ *b)* $S = \left\{1; \dfrac{1}{4}\right\}$ *c)* $S = \{-3;1\}$ *d)* $S = \{2\}$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\left|\dfrac{3x-6}{1-2x}\right| = x - 2$ b) $|-2x + 8| = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x + 3}$ c) $\dfrac{|x| - 6}{x^2 - 36} = 2$

d) $\dfrac{|x^2 - 4x + 3|}{5x^2 - 7x + 2} = x - 3$ e) $\dfrac{-2x^2 + 7x - 4}{|2x + 1|} = 4 - x$ f) $\dfrac{|x^2 + 5x + 4|}{x^2 + 3x + 2} = x + 4$

ĐS: a) $S=\{2\}$ *b)* $S=\left\{-\frac{4}{3};4\right\}$ *c)* $S=\left\{-\frac{13}{2}\right\}$ *d)* $S=\left\{\frac{3}{5};3\right\}$ *e)* $S=\{4\}$ *f)* $S=\{-4\}$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $|2x+1|=|x-1|$ b) $|2-5x|=|3x+1|$ c) $|1+4x|-|7x-2|=0$

d) $|2x^2+5x-10|=2x^2+1$ e) $||x-3|+4|=6$ f) $|x^2-3x|=x^2+1$

ĐS: a) $S=\{-2;0\}$ *b)* $S=\left\{\frac{1}{8};\frac{3}{2}\right\}$ *c)* $S=\left\{\frac{1}{11};1\right\}$ *d)* $S=\left\{-\frac{9}{4};1;\frac{9}{5}\right\}$ *e)* $S=\{1;5\}$ *f)* $S=\left\{1;\frac{1}{2}\right\}$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $|2x+1|-|5x-2|=3$ b) $2|x|-|x+3|-1=0$ c) $|x-2|+|x-3|=1$

d) $|x+1|-2|x-1|=x$ e) $|2x+3|-|x|+x-1=0$ f) $|x-1|+|x+1|=0$

ĐS: a) $S=\varnothing$ *b)* $S=\{4\}$ *c)* $2\le x\le 3$ *d)* $S=\left\{\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\}$ *e)* $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ *f)* $S=\varnothing$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $3x-8\ge 5x+12$ b) $-4x+15<24-7x$ c) $x+1\ge 7-2x$

d) $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}\ge 1-\frac{x+3}{4}$ e) $\frac{2x-1}{2}-2x\le -(2x+1)$ f) $\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}\le x-\frac{x-3}{4}$

ĐS: a) $x\le -10$ *b)* $x<3$ *c)* $x\ge 2$ *d)* $x\ge -\frac{11}{7}$ *e)* $x\le -\frac{1}{2}$ *f)* $x\ge -1$

Bài 2.

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của bất phương trình: $11x-7<8x+2$

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên âm của bất phương trình:

$$\frac{x^2+2x+8}{2}-\frac{x^2-x+1}{6}>\frac{x^2+x+1}{3}-\frac{x+1}{4}$$

c) Tìm nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình: $4(2-3x)-(5-x)>11-x$

d) Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình: $2(3-x)-1,5(x-4)<3-x$

ĐS: a) $\{1;2\}$ *b)* $\{-3;-2;-1\}$

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{x-5}{2005}+\frac{x-15}{1995}<\frac{x-2005}{5}+\frac{x-1995}{15}$ b) $\frac{1987-x}{15}+\frac{1988-x}{16}+\frac{27+x}{1999}+\frac{28+x}{2000}>4$

c) $\left(\frac{1}{1.101}+\frac{1}{2.102}+...+\frac{1}{10.110}\right)x\ge\frac{1}{1.11}+\frac{1}{2.12}+...+\frac{1}{100.110}$

ĐS: a) $x>2010$. *Trừ 2 vế cho 2* *b)* $x<1972$. *Trừ 2 vế cho 4*

c) $x\ge 10$. *Biến đổi* $\frac{1}{k(100+k)}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{100+k}\right)$, $\frac{1}{k(k+10)}=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+10}\right)$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $|x-3|-5x=7$ b) $|x-5|=|2x-9|$ c) $||2x-11|-x|=8$

d) $|4x-7|+\frac{|7-4x|}{4x-7}=9$ e) $\frac{|7x^2-9x+2|}{5x+4}=2-7x$ f) $\frac{x^2-8x+15}{|2x^2-9x-5|}=3x-9$

ĐS: a) $S=\left\{\frac{5}{3}\right\}$ *b)* $S=\left\{4;\frac{14}{3}\right\}$ *c)* $S=\{1;19\}$ *d)* $S=\left\{-\frac{3}{4};\frac{15}{4}\right\}$ *e)* $S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{2}{7}\right\}$ *f)* $S=\{3\}$