Tìm $A,\ B \in (C): y=\dfrac{2x}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại $A,\ B$ song song với nhau và ΔOAB vuông tại O ?

LỜI GIẢI

- Gọi $A\left(a;\dfrac{2a}{a-1}\right),\ B\left(b;\dfrac{2b}{b-1}\right)\in(C),\ \left(a;b\neq 1;a\neq b\right)$. Ta có: $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.
- Tiếp tuyến tại A và B lần lượt có hệ số góc: $k_A=\dfrac{-2}{(a-1)^2};\ k_B=\dfrac{-2}{(b-1)^2}$.
- Do tiếp tuyến tại A và B song song nhau nên $k_A=k_B \Leftrightarrow \dfrac{-2}{(a-1)^2}=\dfrac{-2}{(b-1)^2}$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2=(b-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1=b-1\\ a-1=1-b\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b\\ a=2-b\end{array}\right. \Leftrightarrow a=2-b \qquad (i)$$

- Do ba điểm O,A,B tạo thành tam giác vuông tại O nên $\begin{cases} O\neq A\neq B\\ \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a,b\neq 0\\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a,b\neq 0\\ ab+\dfrac{4ab}{(a-1)(b-1)}=0\end{cases} \Leftrightarrow 1+\dfrac{4}{(a-1)(b-1)}=0 \quad (ii)$$

$$(i),(ii)\Rightarrow \begin{cases} a=2-b\\ 1+\dfrac{4}{(a-1)(b-1)}=0\end{cases} \Leftrightarrow 1=-\dfrac{4}{(1-b)(b-1)} \Leftrightarrow (b-1)^2=4$$

$\Leftrightarrow b=3\Rightarrow a=-1 \ \vee\ b=-1\Rightarrow a=3$.

- Vậy $A(-1;1),\ B(3;3)$ hoặc $A(-3;3),\ B(-1;1)$ là các điểm cần tìm.

Tìm những điểm $M\in(C): y=\dfrac{x-1}{2x+2}$ sao cho tiếp tuyến với (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: 4x+y=0$?

LỜI GIẢI

- Gọi $M\left(x_o;\dfrac{x_o-1}{2x_o+2}\right)\in(C),\ (x_o\neq -1)$ và tiếp tuyến Δ tại điểm M có phương trình

$$\Delta: y=\frac{1}{(x_o+1)^2}(x-x_o)+\frac{x_o-1}{2(x_o+1)} \qquad (i)$$

- Gọi $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A\left(\dfrac{-x_o^2+2x_o+1}{2};0\right), B=\Delta\cap Oy\Rightarrow B\left(0;\dfrac{x_o^2-2x_o-1}{2(x_o+1)^2}\right)$.
- Khi đó tọa độ trọng tâm của ΔOAB là $G\left(-\dfrac{x_o^2-2x_o-1}{6};\dfrac{x_o^2-2x_o-1}{6(x_o+1)^2}\right)$.
- Do $G\in d: 4x+y=0 \Leftrightarrow -4\dfrac{x_o^2-2x_o-1}{6}+\dfrac{x_o^2-2x_o-1}{6(x_o+1)^2}=0$

$\Leftrightarrow (x_o+1)^2 = 4 \quad (do: A \ne B \ne O \Rightarrow x_o^2 - 2x_o - 1 \ne 0)$

$\Leftrightarrow x_o = -\frac{1}{2} \vee x_o = -\frac{3}{2}$ nên $(i) \Rightarrow M_1\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ hoặc $M_2\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Tìm $A \in (C): y = x^3 - 3x + 1$ biết rằng tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm A, cắt đồ thị (C) tại B (khác điểm A) thỏa: $x_A + x_B = 1$?

LỜI GIẢI

- Gọi $A(x_A; x_A^3 - 3x_A + 1) \in (C)$ và phương trình tiếp tuyến tại điểm A có dạng

$\Delta: y = (3x_A^2 - 3)(x - x_A) + x_A^3 - 3x_A + 1$.

- Ta có $\Delta \cap (C) = B$ có hoành độ nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm:

$(3x_A^2 - 3)(x_B - x_A) + x_A^3 - 3x_A + 1 = x_B^3 - 3x_B + 1 \qquad (i)$

- Theo giả thiết, ta có: $x_A + x_B = 1 \Rightarrow x_B = 1 - x_A \qquad (ii)$

$(i),(ii) \Rightarrow (3x_A^2 - 3)(1 - 2x_A) + x_A^3 - 3x_A = (1 - x_A)^3 - 3(1 - x_A)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_A^3 + 3x_A - 1 = 0 \\ x_A \ne x_B,\ (do: A \ne B) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = -1 \Rightarrow x_B = 2 \\ x_A = \frac{1}{2} \Rightarrow x_B = \frac{1}{2}\ (L) \end{array}\right. \Rightarrow A(-1;3)$.

Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2 \quad (C)$.Tìm điểm M thuộc (C), sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm thứ hai là N và $MN = 6\sqrt{5}$.

LỜI GIẢI

Gọi $M(m; m^3 - 3m + 1) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

$y = (3m^2 - 3)(x - m) + m^2 - 3m + 2 \ (d)$. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$x^3 - 3x + 2 = (3m^2 - 3)(x - m) + m^2 - 3m + 2 \Leftrightarrow (x - m)^2(x + 2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = -2m \end{array}\right.$, để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow m \ne -2m \Leftrightarrow m \ne 0$, khi đó $N(-2m; -8m^3 + 6m + 2)$.

Có $MN^2 = 81m^6 - 2.81m^4 + 90m^2 = 180$. Đặt $t = m^2, t \ge 0 \Rightarrow 9t^3 - 18t^2 + 10t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \ m = \pm\sqrt{2}$

Vậy có hai điểm N cần tìm $N(-2\sqrt{2}; -10\sqrt{2} + 2), N(2\sqrt{2}; 10\sqrt{2} + 2)$

Chứng minh rằng với mọi m thì đường thẳng $d: y = x + m$ luôn cắt đồ thị $(C): y = \frac{1-x}{2x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất ?

LỜI GIẢI

- Phương trình hoành độ giao điểm giữa d và $(C): \frac{1-x}{2x-1} = x + m, \forall x \ne \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow g(x) = 2x^2 + 2mx - (m+1) = 0, \forall x \ne \frac{1}{2}$

- Ta có: $\begin{cases} \Delta'_g = m^2 + m + 2 > 0 \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \neq 0 \end{cases}$: luôn đúng $\forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow d \cap (C) = \{A; B\}$.
- Gọi $A(a; a+m), B(b; b+m)$ với a, b là hai nghiệm của $g(x) = 0$.
- Ta có: $T = k_1 + k_2 = y'(a) + y'(b) = -\left[\frac{1}{(2a-1)^2} + \frac{1}{(2b-1)^2}\right]$

$\Rightarrow T = -\dfrac{4\left[(a+b)^2 - 2ab\right] - 4(a+b) + 2}{\left[4ab - 2(a+b) + 1\right]^2} = -4(m+1)^2 - 2 \leq -2$

- Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ thì $T_{max} = (k_1 + k_2)_{min} = -2$.

Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 + 4m - 3 \quad (1)$ Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $y = 2x - 7$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với đồ thị hàm số (1) tại các điểm A, B, C bằng 28.

LỜI GIẢI

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $d: y = 2x - 7$ và đồ thị hàm số (1):

$x^3 - (m+2)x^2 + 4m - 3 = 2x - 7 \Leftrightarrow x^3 - (m+2)x^2 - 2x + 4m + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - mx - 2m - 2 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$. Đặt $g(x) = x^2 - mx - 2m - 2$

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A, B, C $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt và khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8m + 8 > 0 \\ 2 - 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 - 2\sqrt{2} \vee m > -4 + 2\sqrt{2} \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ (3).

Gọi $A(2; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của (2). Hệ số góc của tiếp tuyến tại các điểm A, B, C với đồ thị hàm số (1) lần lượt là:

$k_A = y'(2) = 4 - 4m, k_B = y'(x_2) = 3x_2^2 - 2(m+2)x_2, k_C = y'(x_3) = 3x_3^2 - 2(m+2)x_3$. Theo đề bài

$k_A + k_B + k_C = 28 \Leftrightarrow 4 - 4m + 3x_2^2 - 2(m+2)x_2 + 3x_3^2 - 2(m+2)x_3 = 28$

$\Leftrightarrow 4 - 4m + 3(x_2^2 + x_3^2) - 2(m+2)(x_2 + x_3) = 28 \Leftrightarrow 4 - 4m + 3\left[(x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3\right] - 2(m+2)(x_2 + x_3) = 28$

$\Leftrightarrow 4 - 4m + 3\left[m^2 - 2(-2m - 2)\right] - 2(m+2)m = 28 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = -6 \vee m = 2$ Kết hợp với điều kiện (3) được m = 2.

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + 2 - m^2 \quad (1)$. Định m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho tổng các hệ số góc của các tiếp tuyến với đồ thị (1) tại ba điểm A, B, C lớn nhất.

LỜI GIẢI

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + m^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) với trục hoành: $x^3-3x^2+m^2x+2-m^2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x+m^2-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ g(x)=x^2-2x+m^2-2=0 \quad (*) \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số (1) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt và khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(*)}>0 \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m^2>0 \\ m^2-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$. Gọi $A(1;y_A), B(x_1;y_B), C(x_2;y_C)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$ theo định lý Vi ét có $x_1+x_2=2$ và $x_1.x_2=m^2-2$.

Ta có $P=k_A+k_B+k_C=y'(1)+y'(x_1)+y'(x_2)$

$=-3+m^2+(3x_1^2-6x_1+m^2)+(3x_2^2-6x_2+m^2)$

$=3\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]-6(x_1+x_2)+3m^2-3=9-3m^2\leq 9$

Vậy $\max P=9$ khi $m=0$.

Kết luận với $m=0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2 \quad (1)$

Tìm tham số m để đường thẳng $d: y=m(2-x)+2$ cắt đồ thị (C) của hàm số (1) tại ba điểm phân biệt $A(2;2), B, C$ sao cho tích các hệ số góc tiếp tuyến với đồ thị (C) tại B và C đạt giá trị nhỏ nhất ?

LỜI GIẢI

- Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3+3x^2-2=m(2-x)+2$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\Rightarrow y=2 \\ g(x)=x^2-x-m-2=0 \end{array}\right.$

- Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $A(2;2), B, C \Leftrightarrow g(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $\neq 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g=9+4m>0 \\ g(2)=-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{9}{4} \\ m\neq 0 \end{cases} \qquad (i)$

- Ta có: $y'=-3x^2+6x$ và gọi $B(x_1;m(2-x_1)+2), C(x_2;m(2-x_2)+2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x)=0$. Theo Viét: $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1x_2=-(m+2) \end{cases}$.

- Ta có: $k_1k_2=y'(x_1).y'(x_2)=(-3x_1^2+6x_1)(-3x_2^2+6x_2)$

$\Leftrightarrow k_1k_2=9(x_1x_2)^2-18x_1x_2(x_1+x_2)+36x_1x_2=9(m+2)^2-18(m+2)\Leftrightarrow k_1k_2=9(x)$

$\Leftrightarrow k_1k_2=9(m+1)^2-9\geq -9 \Rightarrow (k_1k_2)_{min}=-9$ khi $m=-1$ (thỏa (i)).

Cho hàm số $y=(x+2)(x-1)^2 \quad (C)$

b). Tìm các điểm M thuộc đường thẳng $d: y=-2x+19$, biết rằng tiếp tuyến của đồ thị (C) đai qua điểm M vuông góc với đường thẳng $x+9y-8=0$.

LỜI GIẢI

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+9y-8=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{9}x+\frac{8}{9}$ (Δ) nên $k_{tt}.k_{\Delta}=-1 \Rightarrow k_{tt}=9$, gọi tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến là $I(x_0;y_0)$, từ đó ta có $y'(x_0)=k_{tt} \Leftrightarrow x_0^2-1=3 \Leftrightarrow x_0=2 \vee x_0=-2$

• Với $x_0=2 \Rightarrow y_0=4$ khi đó phương trình tiếp tuyến $d_1: y=y'(1)(x-2)+4 \Leftrightarrow d_1: y=9x-14$. Suy ra M là giao điểm của d và d_1 tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=9x-14 \\ y=-2x+19 \end{cases} \Rightarrow M(3;13)$.

• Với $x_0=-2 \Rightarrow y_0=0$ khi đó phương trình tiếp tuyến $d_2: y=9x+18$. Suy ra M là giao điểm của d và d_2 tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=9x+18 \\ y=-2x+19 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{11};\frac{201}{11}\right)$.

Kết luận tọa độ điểm M cần tìm là $M(3;13)$ hoặc $M\left(\frac{1}{11};\frac{201}{11}\right)$.

Cho hàm số $y=x^3-3x^2+(m-2)x+3m$ (C_m) (m là tham số).
Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) của hàm số đã cho vuông góc với đường thẳng $d: x-y+2=0$.

LỜI GIẢI

Có $y'=3x^2-6x+m-2$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C_m)$, suy ra hệ số góc tiếp tuyến của (C_m) tại M là

$k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0+m-2=3(x_0-1)^2+m-5\ge m-5$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_0=1$ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến nhỏ nhất là $k_{min}=m-5$ tại điểm $M(1;4m-4)$.

Để tiếp tuyến vuông góc với d $\Leftrightarrow k_{tt}.k_d=-1 \Leftrightarrow (m-5).1=-1 \Leftrightarrow m=4$.

Kết luận với m = 4 thỏa yêu cầu đề bài.