Bài 5: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a). $y = x\cos x$ b). $y = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3$ c). $y = \sin^3(2x+1)$

d). $y = \sin\sqrt{2+x^2}$ e). $y = \sqrt{\sin x + 2x}$ f). $y = 2\sin^2 4x - 3\cos^3 5x$

h). $y = (2+\sin^2 2x)^3$ i). $y = \sin(\cos^2 x.\tan^2 x)$ j). $y = \cos^2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$

k). $y = \frac{\sin 2x + \cos 2x}{2\sin 2x - \cos 2x}$ l). $y = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ m). $y = \sin x.\cos 2x$

n). $y = (\cos^4 x - \sin^4 x)^5$ o). $y = \sin^2(\cos(\tan^4 3x))$ q). $y = (\sin x + \cos x)^3$

r). $y = 5\sin x - 3\cos x$ s). $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$

LỜI GIẢI

a). $y = x\cos x$. Ta áp dụng đạo hàm tích.

$y' = x'\cos x + x.(\cos x)' = \cos x - x\sin x.$

b) $y = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3$. Bước đầu tiên ta áp dụng công thức $(u^\alpha)'$ với $u = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$y' = 3\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2.\left(\frac{\sin}{1+\cos x}\right)'$

Tính : $\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(1+\cos x) - (1+\cos x)'.\sin x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x(1+\cos x) + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$.

Vậy $y' = 3\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2.\frac{1}{1+\cos x} = \frac{3\sin^2 x}{(1+\cos x)^3}$.

c). $y = \sin^3(2x+1)$. Bước đầu tiên áp dung công thức $(u^\alpha)'$ với $u = \sin(2x+1)$

Vậy $y' = (\sin^3(2x+1))' = 3\sin^2(2x+1).(\sin(2x+1))'$.

Tính $(\sin(2x+1))'$: Áp dụng $(\sin u)'$, với $u = (2x+1)$

Ta được: $(\sin(2x+1))' = \cos(2x+1).(2x+1)' = 2\cos(2x+1).$

$\Rightarrow y' = 3.\sin^2(2x+1).2\cos(2x+1) = 6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1).$

d). $y = \sin\sqrt{2+x^2}$. Áp dụng công thức $(\sin u)'$ với $u = \sqrt{2+x^2}$

$y' = \cos\sqrt{2+x^2}.\left(\sqrt{2+x^2}\right)' = \cos\sqrt{2+x^2}.\frac{(2+x^2)'}{2\sqrt{2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}.\cos\sqrt{2+x^2}.$

e). $y = \sqrt{\sin x + 2x}$. Áp dụng $(\sqrt{u})'$, với $u = \sin x + 2x$

$y'=\dfrac{(\sin x+2x)'}{2\sqrt{\sin x+2x}}=\dfrac{\cos x+2}{2\sqrt{\sin x+2x}}.$

f). $y=2\sin^2 4x-3\cos^3 5x$. Bước đầu tiên áp dụng $(u+v)'$

$y'=(2\sin^2 4x)'-3(\cos^3 5x)'$

Tính $(\sin^2 4x)'$: Áp dụng $(u^\alpha)'$, với $u=\sin 4x$, ta được:

$(\sin^2 4x)'=2\sin 4x.(\sin 4x)'=2\sin 4x.\cos 4x(4x)'=4\sin 8x.$

Tương tự: $(\cos^3 5x)'=3\cos^2 5x.(\cos 5x)'=3\cos^2 5x.(-\sin 5x).(5x)'$

$$=-15\cos^2 5x.\sin 5x=\frac{-15}{2}\cos 5x.\sin 10x.$$

Kết luận: $y'=8\sin 8x+\dfrac{45}{2}\cos 5x.\sin 10x$

h). $y=(2+\sin^2 2x)^3$. Áp dụng $(u^\alpha)'$, với $u=2+\sin^2 2x.$

$y'=3(2+\sin^2 2x)^2(2+\sin^2 2x)'=3(2+\sin^2 2x)^2(\sin^2 2x)'.$

Tính $(\sin^2 2x)'$, áp dụng $(u^\alpha)'$, với $u=\sin 2x.$

$(\sin^2 2x)'=2.\sin 2x(\sin 2x)'=2.\sin 2x.\cos 2x(2x)'=2\sin 4x.$

$\Rightarrow y'=6\sin 4x(2+\sin^2 2x)^2.$

i). $y=\sin(\cos^2 x.\tan^2 x)$. Áp dụng $(\sin u)'$, với $u=\cos^2 x\tan^2 x$

$y'=\cos(\cos^2 x.\tan^2 x).(\cos^2 x.\tan^2 x)'.$

Tính $(\cos^2 x.\tan^2 x)'$, bước đầu sử dụng $(u.v)'$, sau đó sử dụng $(u^\alpha)'$.

$(\cos^2 x.\tan^2 x)'=(\cos^2 x)'.\tan^2 x+(\tan^2 x)'.\cos^2 x$

$=2\cos x(\cos x)'\tan^2 x+2\tan x(\tan x)'\cos^2 x$

$=-2\sin x\cos x\tan^2 x+2\tan x\dfrac{1}{\cos^2 x}\cos^2 x=-\sin 2x\tan^2 x+2\tan x.$

Vậy $y'=\cos(\cos^2 x.\tan^2 x)(-\sin 2x\tan^2 x+2\tan x)$

j). $y=\cos^2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$. Áp dụng $(u^\alpha)'$, với $u=\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$

$y'=2.\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\left[\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]'=-2.\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\sin\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)'$

$y'=-\sin\left(2\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)'.$

Tính $\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)'=\dfrac{(\sqrt{x}+1)'.(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}-1)'.(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2}=\dfrac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}.$

Vậy $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}.\sin\left(2.\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

k). $y=\dfrac{\sin 2x+\cos 2x}{2\sin 2x-\cos 2x}$.

$$y'=\frac{\left(\sin 2x+\cos 2x\right)'.\left(2\sin 2x-\cos 2x\right)-\left(2\sin 2x-\cos 2x\right)'.\left(\sin 2x+\cos 2x\right)}{\left(2\sin 2x-\cos 2x\right)^2}$$

$$y'=\frac{\left(2\cos 2x-2\sin 2x\right)\left(2\sin 2x-\cos 2x\right)-\left(4\cos 2x+2\sin 2x\right)\left(\sin 2x+\cos 2x\right)}{\left(2\sin 2x-\cos 2x\right)^2}$$

$$y'=\frac{-6\cos^2 2x-6\sin^2 2x}{\left(2\sin 2x-\cos 2x\right)^2}=\frac{-6}{\left(2\sin 2x-\cos 2x\right)^2}.$$

l). $y=\dfrac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\dfrac{1}{\cos 2x}$. Áp dụng $\left(\dfrac{1}{u}\right)'$.

$$y'=\frac{-\left(\cos 2x\right)'}{\left(\cos 2x\right)^2}=\frac{\sin 2x.\left(2x\right)'}{\cos^2 2x}=\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}.$$

m). $y=\sin x.\cos 2x$. Áp dụng $\left(u.v\right)'$

$y'=\left(\sin x\right)'.\cos 2x+\left(\cos 2x\right)'.\sin x=\cos x.\cos 2x-\sin 2x.\left(2x\right)'.\sin x$

$y'=\cos x.\cos 2x-2\sin 2x.\sin x.$

n). $y=\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)^5=\left[\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\right]^5=\left(\cos 2x\right)^5$.

Áp dụng $\left(u^\alpha\right)'$, với $u=\cos 2x$

$y'=5.\cos^4 2x.\left(\cos 2x\right)'=5.\cos^4 2x.\left(-\sin 2x\right).\left(2x\right)'=-10\cos^4 2x.\sin 2x.$

o). $y=\sin^2\left(\cos\left(\tan^4 3x\right)\right)$

Đầu tiên áp dụng $\left(u^\alpha\right)'$, với $u=\sin\left(\cos\left(\tan^4 3x\right)\right)$

$y'=2\sin\left(\cos\left(\tan^4 3x\right)\right).\left[\sin\left(\cos\left(\tan^4 3x\right)\right)\right]'$

Sau đó áp dụng $\left(\sin u\right)'$, với $u=\cos\left(\tan^4 3x\right)$

$y'=2\sin\left(\cos\left(\tan^4 3x\right)\right).\cos\left(\cos\left(\tan^4 3x\right)\right).\left(\cos\left(\tan^4 3x\right)\right)'$

Áp dụng $\left(\cos u\right)'$, với $u=\tan^4 3x$.

$y'=-\sin\left(2\cos\left(\tan^4 3x\right)\right).\left(\sin\left(\tan^4 3x\right)\right).\left(\tan^4 3x\right)'$.

Áp dụng $\left(u^\alpha\right)'$, với $u=\tan 3x$

$y'=-\sin\left(2\cos\left(\tan^4 3x\right)\right).\left(\sin\left(\tan^4 3x\right)\right).4\tan^3 3x.\left(\tan 3x\right)'$.

$y'=-\sin\left(2\cos\left(\tan^4 3x\right)\right).\left(\sin\left(\tan^4 3x\right)\right).4\tan^3 3x.\left(1+\tan^2 3x\right).\left(3x\right)'$.

$y'=-\sin\left(2\cos\left(\tan^4 3x\right)\right).\left(\sin\left(\tan^4 3x\right)\right).4\tan^3 3x.\left(1+\tan^3 3x\right).3$.

p) $y = \sin^3 2x.\cos^3 2x = (\sin 2x.\cos 2x)^3 = \left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)^3 = \frac{1}{8}.\sin^3 4x$

Áp dụng $(u^\alpha)^/$, $u = \sin 4x$.

$y' = \frac{1}{8}.3\sin^2 4x(\sin 4x)^/ = \frac{1}{8}.3\sin^2 4x.\cos 4x.(4x)^/ = \frac{3}{2}\sin^2 4x.\cos 4x.$

q) $y = (\sin x + \cos x)^3$. Áp dụng $(u^\alpha)^/$, với $u = \sin x + \cos x$

$y' = 3(\sin x + \cos x)^2.(\sin x + \cos x)^/ = 3(\sin x + \cos x)^2(\cos x - \sin x).$

r). $y = 5\sin x - 3\cos x$

$y' = (5\sin x)^/ - (3\cos x)^/ = 5\cos x + 3\sin x.$

s). $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$

Áp dụng $(\sin u)^/$, với $u = (x^2 - 3x + 2)$

$y' = \cos(x^2 - 3x + 2).(x^2 - 3x + 2)^/ = (2x - 3).\cos(x^2 - 3x + 2)$