Câu 13. Một đại lý xăng dầu cần xây một bồn chứa dầu hình trụ có đáy hình tròn bằng thép có thể tích $49\pi\left(m^3\right)$ và giá mỗi mét vuông thép là 500 ngàn đồng. Hỏi giá tiền thấp nhất mà đại lý phải trả gần đúng với số tiền nào nhất.

A. 79,5 triệu B. 80,5 triệu C.77,4 triệu D.75 triệu

Hướng dẫn giải

Gọi bán kính đáy là $x(m)\ (x>0)$, chiều cao bồn chứa là $h(m)$. Khi đó thể tích chứa của bồn là

$$V=\pi x^2.h=49\pi \Leftrightarrow h=\frac{49}{x^2}\ (m)$$

Do là bồn chứa dầu nên phải có nắp nên diện tích cần xây của bồn chứa là: $2.\pi x^2+2\pi x.h=2\pi x^2+\frac{98\pi}{x}$.

Để chi phí xây dựng thấp nhất thì diện tích xây cũng phải thấp nhất.

Xét hàm số $f(x)=2\pi x^2+\frac{98\pi}{x}\ (x>0)$ có giá trị nhỏ nhất gần bằng $159,005\left(m^2\right)$

Câu 14. Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

A. 480 ngàn. B. 50 ngàn. C. 450 ngàn. D. 80 ngàn.

Hướng dẫn giải

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x>400$ (đơn vị: ngàn đồng).

Giá chênh lệch sau khi tăng $x-400$.

Số phòng cho thuê giảm nếu giá là x: $\frac{(x-400)+2}{20}=\frac{x-400}{10}$.

Số phòng cho thuê với giá x là $50-\frac{x-400}{10}=90-\frac{x}{10}$.

Tổng doanh thu trong ngày là: $f(x)=x\left(90-\frac{x}{10}\right)=-\frac{x^2}{10}+90x$.

$f'(x)=-\frac{x}{5}+90$. $f'(x)=0\Leftrightarrow x=450$.

Bảng biến thiên:

x	400		450		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$		20250		$\searrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 450$.

Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 2.025.000 đồng.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng chức năng w7 lập bảng giá trị của hàm số $F(X) = -\frac{X^2}{10} + 90X$ trên đoạn $[400;600]$ và quan sát để tìm giá trị lớn nhất của $F(X)$.

Câu 15. Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VNĐ và bán ra 30 triệu VNĐ, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VNĐ mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất.

A. 29 triệu VNĐ B. 27, 5 triệu VNĐ C. 29, 5 triệu VNĐ D. 27 triệu VNĐ

Hướng dẫn giải

Gọi x (triệu VNĐ) là số tiền cần giảm cho mỗi chiếc xe $(0 \le x \le 4)$.

Số lượng xe bán ra được trong một năm sau khi giảm giá là: $x.200 + 600$ (chiếc)

Số lợi nhuận thu được từ việc bán xe trong một năm sau khi giảm giá là: $(x.200 + 600)(4 - x)$

Xét hàm số $f(x) = (x.200 + 600)(4 - x) = 200(-x^2 + x + 12)$ $(0 \le x \le 4)$ đạt giá trị lớn nhất là 2450 khi $x = \frac{1}{2}$.

Câu 16. Công ty dụ lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất.

A. 1375000. B. 3781250. C. 2500000. D. 3000000.

Hướng dẫn giải

Gọi x (triệu đồng) là giá tua.

Giá đã giảm so với ban đầu là $2-x$.

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán x là: $\dfrac{(2-x)20}{0,1}=400-200x$.

Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là: $150+(400-200x)=550-220x$.

Tổng doanh thu là: $f(x)=x(550-200x)=-200x^2+550x$.

$f'(x)=-400x+550$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{11}{8}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{11}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{3025}{8}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x=\dfrac{11}{8}=1,375$.

Vậy công ty cần đặt giá tua 1375000 đồng thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 378125000 đồng.

Câu 17. Một cửa hàng nhận làm những chiếc xô bằng nhôm hình trụ không có nắp đủ chứa được10 lít nước. Hỏi bán kính đáy (đơn vị cm, làm tròn đến hàng phần chục) của chiếc xô bằng bao nhiêu để cửa hàng tốn ít nguyên vật liệu nhất.

A. $14,7$ B. 15 C. $15,2$ D. 14

Hướng dẫn giải

Gọi x ($x>0$) là bán kính của chiếc xô. Khi đó $V=\pi x^2 h \Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi x^2}$.

Để tiết kiệm nguyên vật liệu thì diện tích toàn phần của chiếc xô phải bé nhất.

Ta có: $10l=10dm^3=10000cm^3$.

Diện tích toàn phần của chiếc xô là:

$$S(x)=\pi x^2+2\pi xh=\pi x^2+2\pi x\frac{V}{\pi x^2}=\pi x^2+2\frac{10000}{x}=\pi x^2+\frac{20000}{x}$$

$S'(x) = 2\pi x - \dfrac{20000}{x^2} = \dfrac{2\pi x^3 - 20000}{x^2}$.

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\pi x^3 - 20000 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \dfrac{10000}{\pi} \Leftrightarrow x = 10.\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$

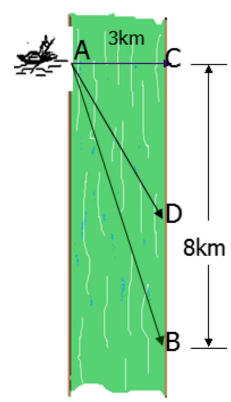
Bảng biến thiên:

x	0		$10.\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		$\searrow$	$2039,4$	$\nearrow$	

Ta thấy diện tích toàn phần chiếc xô nhỏ nhất khi bán kính đáy xô là $x = 10\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}} \approx 14,7(\text{cm})$

.

Câu 18. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí *A* tới điểm *B* về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng $3km$ (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến *C* và sau đó chạy đến *B*, hay có thể chèo trực tiếp đến *B*, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm *D* giữa *C* và *B* và sau đó chạy đến *B*. Biết anh ấy có thể chèo thuyền $6km/h$, chạy $8km/h$ và quãng đường $BC = 8km$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tìm khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến *B*.



Câu 19. A. $\dfrac{3}{2}$ B. $\dfrac{9}{\sqrt{7}}$ C. $\dfrac{\sqrt{73}}{6}$ D. $1 + \dfrac{\sqrt{7}}{8}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $CD = x$. Quãng đường chạy bộ $DB = 8 - x$ và quãng đường chèo thuyền $AD = \sqrt{9 + x^2}$.

Khi đó, thời gian chèo thuyền là $\dfrac{\sqrt{9 + x^2}}{6}$ và thời gian chạy bộ là $\dfrac{8 - x}{8}$.

Tổng thời gian mà người đàn ông cần có là:

$T(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \dfrac{8 - x}{8}, \forall x \in [0;8]$.

Ta có: $T'(x) = \dfrac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \dfrac{1}{8}$.

$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 4x = 3\sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow 16x^2 = 9(x^2 + 9) \Leftrightarrow 7x^2 = 81 \Rightarrow x = \dfrac{9}{\sqrt{7}}$

Ta có: $T(0)=\dfrac{3}{2}$; $T\left(\dfrac{9}{\sqrt{7}}\right)=1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$; $T(8)=\dfrac{\sqrt{73}}{6}$.

Do đó: $\min\limits_{[0;8]} T(x)=T\left(\dfrac{9}{\sqrt{7}}\right)=1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$.

Vậy thời gian ngắn nhất mà người đàn ông cần dùng là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\approx 1,33(h)$ bằng cách chèo thuyền đến điểm D cách C một khoảng $\dfrac{9}{\sqrt{7}}(km)$ rồi từ đó chạy bộ đến điểm B.

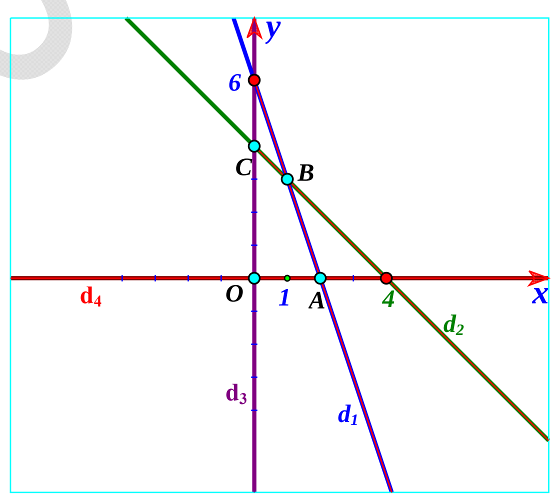
Câu 20. Một xưởng có máy cắt và máy tiện dùng để sản xuất trục sắt và đinh ốc. Sản xuất 1 tấn trục sắt thì lần lượt máy cắt chạy trong 3 giờ và máy tiện chạy trong 1 giờ, tiền lãi là 2 triệu. Sản xuất 1 tấn đinh ốc thì lần lượt máy cắt và máy tiện chạy trong 1 giờ, tiền lãi là 1 triệu. Một máy không thể sản xuất cả 2 loại. Máy cắt làm không quá 6giờ/ngày, máy tiện làm không quá 4giờ/ngày. Một ngày xưởng nên sản xuất bao nhiêu tấn mỗi loại để tiền lãi cao nhất.

A. 1 tấn trục sắt và 3 tấn đinh ốc
B. 3 tấn trục sắt và 1 tấn đinh ốc
C. 2 tấn trục sắt và 3 tấn đinh ốc
D. 2 tấn trục sắt và 2 tấn đinh ốc

Hướng dẫn giải

Gọi $x, y (x\ge 0, y\ge 0)$ là số tấn trục sắt và đinh ốc sản xuất trong ngày.
Số tiền lãi mỗi ngày: $L(x,y)=2x+y$.
Số giờ làm việc mỗi ngày của máy cắt: $3x+y\le 6$.
Số giờ làm việc mỗi ngày của máy tiện: $x+y\le 4$.

Ta có bài toán tìm giá trị lớn nhất của $L(x,y)$ biết $\begin{cases}3x+y\le 6\\ x+y\le 4 \quad (*)\\ x\ge 0, y\ge 0\end{cases}$.



Miền nghiệm của (*) là tứ giác $OABC$ như hình vẽ với

$O(0;0), A(2;0), B(1;3), C(0;4)$.

Ta có: $L(0;0)=0, L(2;0)=4, L(0,4)=4, L(1,3)=5$.

Vậy mỗi ngày cần sản xuất 1 tấn trục sắt và 3 tấn đinh ốc thì thu được tiền lãi cao nhấ là 5 triệu đồng.

Câu 21. Trong 1 cuộc thi pha chế, mỗi đội được dùng tối đa 24g hương liệu, 9 lít nước và 210g đường để pha nước cam và nước táo. Pha 1 lít nước cam cần 30g đường, 1 lít nước và 1g hương liệu; pha 1 lít nước táo cần 10g đường, 1 lít nước và 4g hương liệu. Mỗi lít nước cam được 60 điểm, mỗi lít nước táo được 80 điểm. Cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để đạt điểm cao nhất.

A. 6 lít nước cam và 3 lít nước táo

B. 4 lít nước cam và 5 lít nước táo

C. 7 lít nước cam và 2 lít nước táo

D. 5 lít nước cam và 4 lít nước táo

Hướng dẫn giải

Gọi $x, y (x \ge 0, y \ge 0)$ là số lít nước cam và nước táo cần pha.

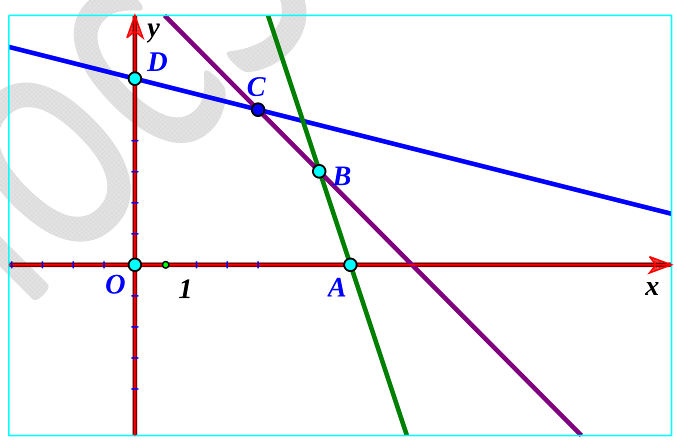
Số điểm đạt được: $D(x,y) = 60x + 80y$.

Số hương liệu cần dùng: $x + 4y \le 24$.

Lượng nước cần dùng: $x + y \le 9$.

Lượng đường cần dùng: $30x + 10y \le 210 \Leftrightarrow 3x + y \le 21$.

Ta có bài toán tìm giá trị lớn nhất của $D(x,y)$ biết $\begin{cases} x+4y \le 24 \\ x+y \le 9 \\ 3x+y \le 21 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$ (*).



Miền nghiệm của (*) là ngũ giác $OABCD$ với

$O(0;0), A(7;0), B(6;3), C(4;5), D(0;6)$.

Ta có: $D(0;0)=0, D(7;0)=420, D(0;6)=480. D(6,3)=600, D(4,5)=640$.

Vậy cần pha 4 lít nước cam và 5 lít nước táo để đạt số điểm cao nhất là 640.

Câu 22. Một phân xưởng có hai máy đặc chủng M_1, M_2 sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu là I và II. Một tấn sản phẩm loại I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại II lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại I phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại II phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ trong một ngày, máy M_2 chỉ làm việc không quá 4 giờ. Hãy đặt kế hoạch sản xuất sao cho tổng số tiền lãi cao nhất.

A. 1 tấn sản phẩm loại I và 2 tấn sản phẩm loại II

B. 1 tấn sản phẩm loại I và 3 tấn sản phẩm loại II

C. 2 tấn sản phẩm loại I và 3 tấn sản phẩm loại II

D. 3 tấn sản phẩm loại I và 3 tấn sản phẩm loại II

Hướng dẫn giải

Gọi *x, y* theo thứ tự là số tấn sản phẩm loại I, loại II sản xuất trong một ngày $(x \geq 0, y \geq 0)$. Như vậy tiền lãi mỗi ngày là $L = 2x + 1,6y$ (triệu đồng) và số giờ làm việc (mỗi ngày) của máy M_1 là $3x + y$ và máy M_2 là $x + y$.

Vì mỗi ngày máy M_1 chỉ làm việc không quá 6 giờ, máy M_2 làm việc không quá 4 giờ nên *x*, *y* phải thỏa mãn hệ bất phương trình

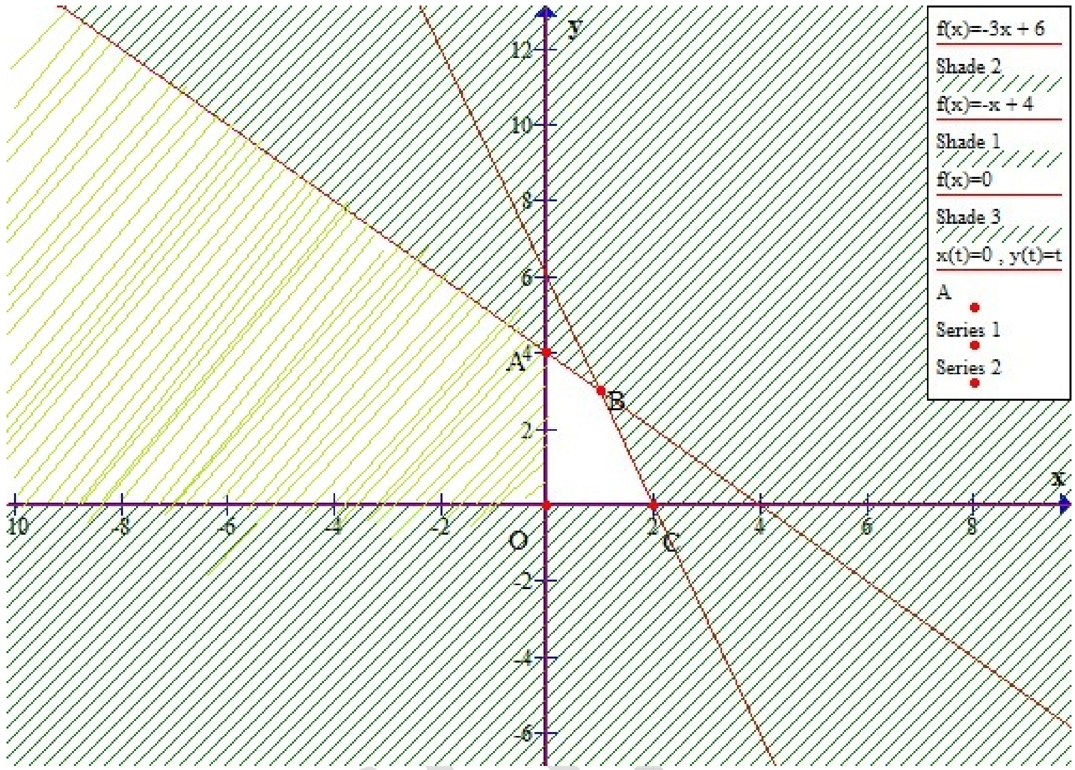
$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Bài toán trở thành: Trong các nghiệm của hệ bất phương trình, tìm nghiệm $(x = x_0; y = y_0)$ sao cho $L = 2x + 1,6y$ lớn nhất

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác *OABC* kể cả miền trong

Ta tính giá trị của biểu thức $L = 2x + 1,6y$ tại tất cả các đỉnh của tứ giác *OABC*, ta thấy *L* lớn nhất khi $x = 1, y = 3$.

Vậy số tiền lãi cao nhất, mỗi ngày cần sản xuất 1 tấn sản phẩm loại I và 3 tấn sản phẩm loại II.



Câu 23. Có ba nhóm máy *A, B, C* dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nhóm	Tổng số máy	Số máy cần để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm	
		Loại I	Loại II
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm I lãi 3 nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm II lãi 5 nghìn đồng. Hãy lập phương án để sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất.

A. Sản xuất 4 đơn vị sản phẩm loại I và 1 đơn vị sản phẩm loại II

B. Sản xuất 4 đơn vị sản phẩm loại I và 2 đơn vị sản phẩm loại II

C. Sản xuất 3 đơn vị sản phẩm loại I và 1 đơn vị sản phẩm loại II

D. Sản xuất 5 đơn vị sản phẩm loại I và 2 đơn vị sản phẩm loại II

Hướng dẫn giải

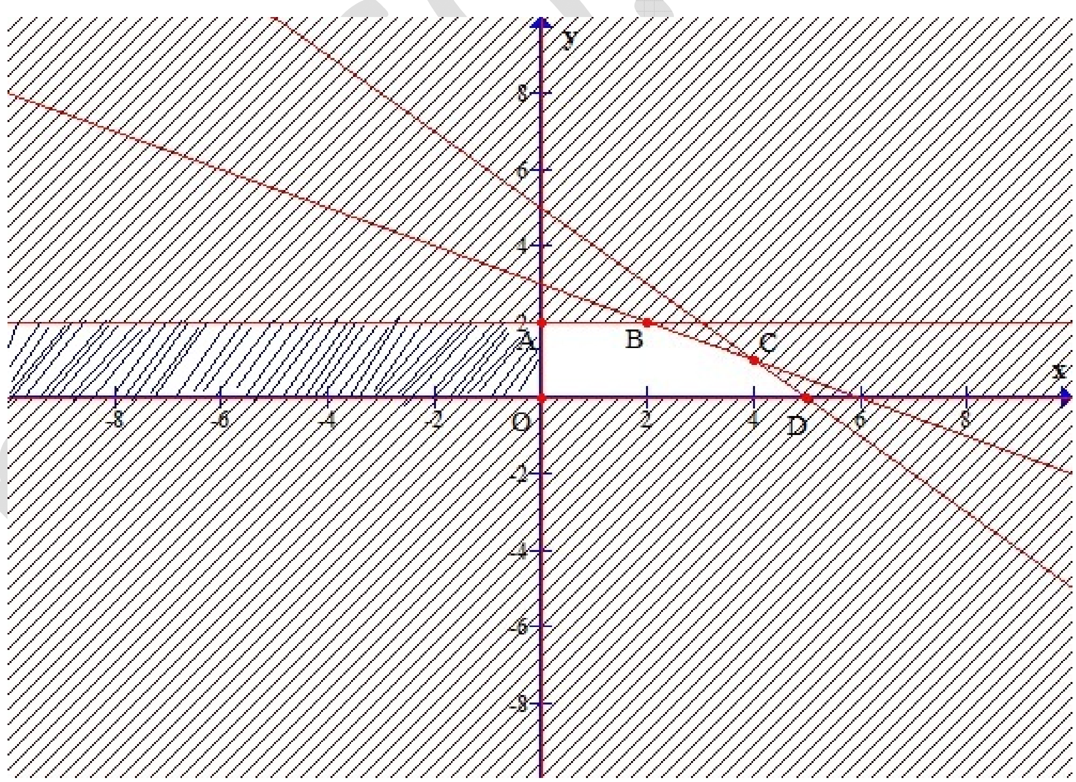
Gọi *x, y* theo thứ tự là số đơn vị sản phẩm loại I, loại II được sản xuất để có lãi cao nhất $(x \geq 0, y \geq 0)$. Như vậy số tiền lãi là $L = 3x + 5y$ (nghìn đồng) và số lượng máy nhóm *A* cần thiết để sản xuất là $2x + 2y$, số lượng máy nhóm *B* cần thiết để sản xuất là $2y$, số lượng máy nhóm *C* cần thiết để sản xuất là $2x + 4y$.

Vì số lượng máy trong nhóm *A* là 10 máy, số lượng máy trong nhóm *B* là 4 máy, số lượng máy trong nhóm *C* là 12 máy nên *x, y* phải thỏa mãn hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ 2x + 4y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Bài toán trở thành: Trong các nghiệm của hệ bất phương trình, tìm nghiệm $(x = x_0; y = y_0)$ sao cho $L = 3x + 5y$ lớn nhất

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là ngũ giác *OABCD* kể cả miền trong



Ta tính giá trị của biểu thức $L = 3x + 5y$ tại tất cả các đỉnh của ngũ giác *OABCD*, ta thấy *L* lớn nhất khi $x = 4, y = 1$.

Vậy số tiền lãi cao nhất, cần sản xuất 4 đơn vị sản phẩm loại I và 1 đơn vị sản phẩm loại II.

Câu 24. Một người có thể tiếp nhận mỗi ngày không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B. Một ngày mỗi người cần 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B. Do tác động phối hợp của hai loại vitamin, mỗi ngày số đơn vị vitamin B phải không ít hơn $\frac{1}{2}$ số đơn vị vitamin A nhưng không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A.
Hãy xác định số đơn vị vitamin A, B phải dùng mỗi ngày sao cho giá thành rẻ nhất, biết rằng giá mỗi đơn vị vitamin A là 9 đồng và vitamin B là 12 đồng.

A. Mỗi ngày $\frac{800}{3}$ đơn vị vitamin A và $\frac{400}{3}$ đơn vị vitamin B

B. Mỗi ngày $\frac{800}{5}$ đơn vị vitamin A và $\frac{400}{3}$ đơn vị vitamin B

C. Mỗi ngày $\frac{800}{3}$ đơn vị vitamin A và $\frac{400}{7}$ đơn vị vitamin B

D. Mỗi ngày 800 đơn vị vitamin A và 400 đơn vị vitamin B

Hướng dẫn giải

Gọi *x, y* lần lượt là số đơn vị vitamin A, B dùng mỗi ngày $(0 \le x \le 600, 0 \le y \le 500)$. Như vậy giá thành là $M = 9x + 12y$. Một ngày mỗi người cần 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B nên $400 \le x + y \le 1000$. Do tác động phối hợp của hai loại vitamin, mỗi ngày số đơn vị vitamin B phải không ít hơn $\frac{1}{2}$ số đơn vị vitamin A nhưng không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A nên $\frac{1}{2}x \le y \le 3x$. Vậy *x, y* phải thỏa mãn hệ bất phương trình: $\begin{cases} 0 \le x \le 600 \\ 0 \le y \le 500 \\ 400 \le x + y \le 1000 \\ x - 2y \le 0 \\ 3x - y \ge 0 \end{cases}$

Bài toán trở thành: Trong các nghiệm của hệ bất phương trình, tìm nghiệm $(x = x_0; y = y_0)$ sao cho $M = 9x + 12y$ nhỏ nhất

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là lục giác ABCDEF

Ta tính giá trị của biểu thức $M = 9x + 12y$ tại tất cả các điểm ABCDEF, ta thấy *M* nhỏ nhất khi $x = \frac{800}{3}, y = \frac{400}{3}$.

Vậy giá thành rẻ nhất, khi dùng mỗi ngày $\frac{800}{3}$ đơn vị vitamin A và $\frac{400}{3}$ đơn vị vitamin B.