

**Câu 7.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = -x^2 + 4$ , đường thẳng  $x = 3$ , trục tung và trục hoành là

- A.  $\frac{23}{3}$                       B.  $\frac{32}{3}$                       C.  $\frac{25}{3}$                       D.  $\frac{22}{3}$

**Hướng dẫn giải**

Xét pt  $-x^2 + 4 = 0$  trên đoạn  $[0; 3]$  có nghiệm  $x = 2$

$$\text{Suy ra } S = \int_0^2 |-x^2 + 4| dx + \int_2^3 |-x^2 + 4| dx = \frac{23}{3}$$

**Câu 8.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong  $y = x^3 - 4x$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = -3$ ,  $x = 4$  là

- A.  $\frac{201}{4}$                       B.  $\frac{203}{4}$                       C.  $\frac{201}{5}$                       D.  $\frac{202}{3}$

**Hướng dẫn giải**

Xét pt  $x^3 - 4x = 0$  trên đoạn  $[-3; 4]$  có nghiệm  $x = -2$ ;  $x = 0$ ;  $x = 2$

$$\text{Suy ra } S = \int_{-3}^{-2} |x^3 - 4x| dx + \int_{-2}^0 |x^3 - 4x| dx + \int_0^2 |x^3 - 4x| dx + \int_2^4 |x^3 - 4x| dx = \frac{201}{4}$$

**Câu 9.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong  $y = x \ln x$ , trục hoành và đường thẳng  $x = e$  là

- A.  $\frac{e^2 + 1}{4}$                       B.  $\frac{e^2 + 1}{2}$                       C.  $\frac{e^2 - 1}{4}$                       D.  $\frac{e^2 - 1}{2}$

**Hướng dẫn giải**

Xét pt  $x \ln x = 0$  trên nửa khoảng  $(0; e]$  có nghiệm  $x = 1$

$$\text{Suy ra } S = \int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$$

**Câu 10.** Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số  $y = x^2 + x - 2$ ,  $y = x + 2$  và hai đường thẳng  $x = -2$ ;  $x = 3$ . Diện tích của (H) bằng

- A.  $\frac{87}{3}$                       B.  $\frac{87}{4}$                       C.  $\frac{87}{5}$                       D.  $\frac{87}{5}$

**Hướng dẫn giải**

Xét phương trình  $(x^2 + x - 2) - (x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$$\text{Suy ra } S = \int_{-2}^2 |x^2 - 4| dx + \int_2^3 |x^2 - 4| dx = \frac{87}{3}$$

**Câu 11.** Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số  $y = (1 + e^x)x$ ,  $y = (1 + e)x$ . Diện tích của (H) bằng

A.  $\frac{e-2}{2}$

B.  $\frac{e-1}{2}$

C.  $\frac{e-2}{2}$

D.  $\frac{e+1}{2}$

**Hướng dẫn giải**

Xét pt  $(1 + e^x)x - (1 + e)x = 0$  có nghiệm  $x = 0, x = 1$

$$\text{Suy ra } S = \int_0^1 |x(e - e^x)| dx = \int_0^1 x(e - e^x) dx = \frac{e-2}{2}$$

**VẬN DỤNG CẤP ĐỘ CAO**

**Câu 31.** Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số  $y = |x^2 - 1|$ ,  $y = |x| + 5$ .

Diện tích của (H) bằng

- A.  $\frac{73}{3}$                       B.  $\frac{71}{3}$                       C.  $\frac{70}{3}$                       D.  $\frac{74}{3}$

**Hướng dẫn giải**

Xét pt  $|x^2 - 1| = |x| + 5$  có nghiệm  $x = -3, x = 3$

$$\text{Suy ra } S = \int_{-3}^3 (|x^2 - 1| - (|x| + 5)) dx = 2 \int_0^3 (|x^2 - 1| - (x + 5)) dx$$

Bảng xét dấu  $x^2 - 1$  trên đoạn  $[0; 3]$

x	0	1	3
$x^2 - 1$	-	0	+

$$\text{Vậy } S = 2 \left| \int_0^1 (-x^2 - x - 4) dx + \int_1^3 (x^2 - x - 6) dx \right| = \frac{73}{3}$$

**Câu 32.** Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số  $y = |x^2 - 4x + 3|$ ,  $y = x + 3$ .

Diện tích của (H) bằng

- A.  $\frac{109}{6}$                       B.  $\frac{109}{5}$                       C.  $\frac{108}{5}$                       D.  $\frac{119}{6}$

**Hướng dẫn giải**

Xét pt  $|x^2 - 4x + 3| = x + 3$  có nghiệm  $x = 0, x = 5$

$$\text{Suy ra } S = \int_0^1 (-x^2 + 5x) dx + \int_1^3 (x^2 - 3x + 6) dx + \int_3^5 (-x^2 + 5x) dx = \frac{109}{6}$$

**Câu 33.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P):  $y = x^2 + 3$ , tiếp tuyến của (P) tại điểm có hoành độ  $x = 2$  và trục tung bằng

- A.  $\frac{8}{3}$                       B.  $\frac{4}{3}$                       C. 2                      D.  $\frac{7}{3}$

**Hướng dẫn giải**

PTTT của (P) tại  $x = 2$  là  $y = 4x + 3$

$$\text{Xét pt } (x^2 + 3) - (4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } S = \int_0^2 |(x^2 - 4x + 4)| dx = \left| \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx \right| = \left| \left( \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right) \Big|_0^2 \right| = \frac{8}{3}$$

**Câu 34.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số  $y^2 - 2y + x = 0$ ,  $x + y = 0$  là

- A.  $\frac{9}{2}$                       B.  $\frac{9}{4}$                       C.  $\frac{7}{2}$                       D.  $\frac{11}{2}$

**Hướng dẫn giải**

Biến đổi về hàm số theo biến số  $y$  là  $x = -y^2 + 2y$ ,  $x = -y$

Xét pt tung độ giao điểm  $(-y^2 + 2y) - (-y) = 0$  có nghiệm  $y = 0$ ,  $y = 3$

$$\text{Vậy } S = \int_0^3 |-y^2 + 3y| dy = \int_0^3 (-y^2 + 3y) dy = \frac{9}{2}$$

**Câu 35.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số  $y = x^2$ ;  $y = \frac{1}{27}x^2$ ;  $y = \frac{27}{x}$  bằng

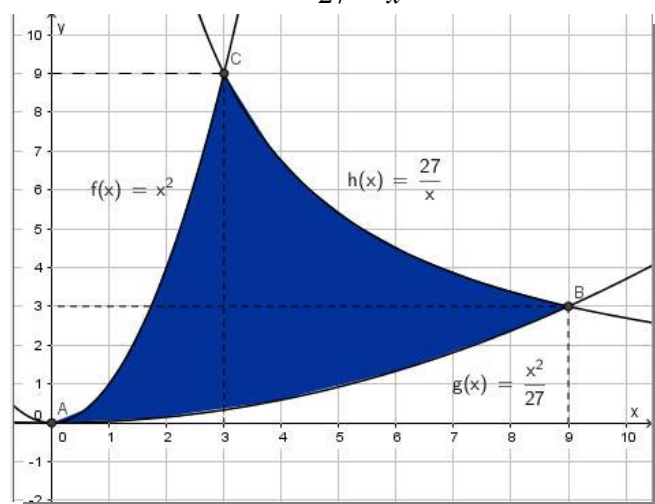
- A.  $27 \ln 3$                       B.  $27 \ln 2$                       C.  $28 \ln 3$                       D.  $29 \ln 3$

**Hướng dẫn giải**

$$x^2 - \frac{x^2}{27} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Xét các pthđgđ  $x^2 - \frac{27}{x} = 0 \Rightarrow x = 3$

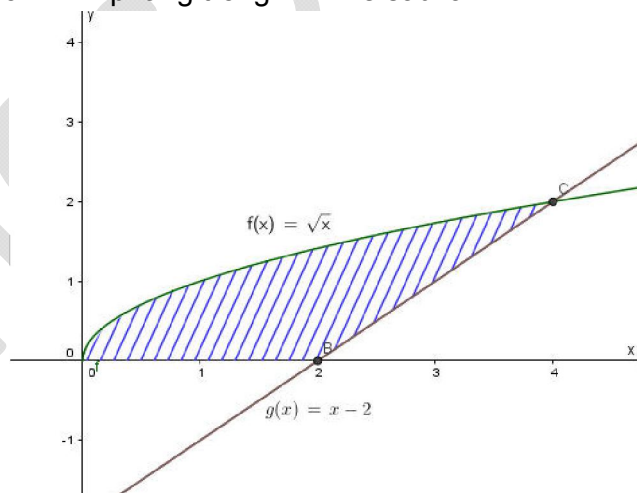
$$\frac{x^2}{27} - \frac{27}{x} = 0 \Rightarrow x = 9$$



Suy ra

$$S = \int_0^3 \left( x^2 - \frac{x^2}{27} \right) dx + \int_3^9 \left( \frac{27}{x} - \frac{x^2}{27} \right) dx = 27 \ln 3$$

Câu 36. Diện tích hình phẳng trong hình vẽ sau là



A.  $\frac{10}{3}$

B.  $\frac{11}{3}$

C.  $\frac{7}{3}$

D.  $\frac{8}{3}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y^2 = y + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Nên } S = \int_0^2 (y + 2 - y^2) dy = \frac{10}{3}$$

**Câu 37.** Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng  $y = 8x, y = x$  và đồ thị hàm số  $y = x^3$  là  $\frac{a}{b}$ . Khi đó  $a + b$  bằng

A. 67

B. 68

C. 66

D. 65

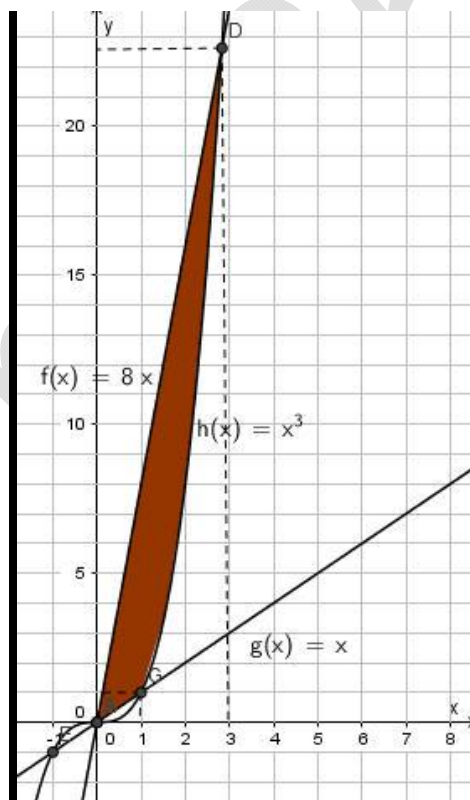
### Hướng dẫn giải

Ta có

$$8x - x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$8x - x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$x - x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$



$$\text{Nên } S = \int_0^1 (8x - x) dx + \int_1^{2\sqrt{2}} (8x - x^3) dx = \frac{63}{4}$$

**Câu 38.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng  $y=1, y=x$  và đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2}{4}$  trong miền  $x \geq 0, y \leq 1$  là  $\frac{a}{b}$ . Khi đó  $b-a$  bằng

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

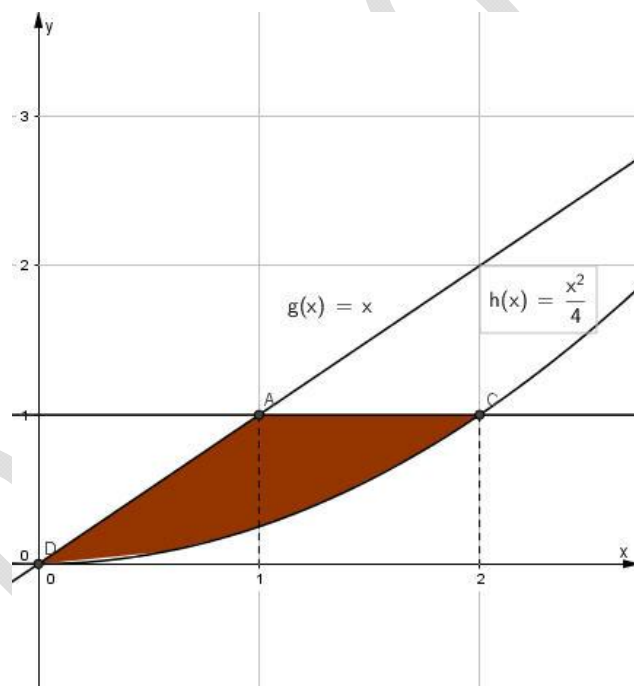
**Hướng dẫn giải**

Ta có

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x - \frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$1 - \frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow x = 2$$



$$\text{Nên } S = \int_0^1 \left( x - \frac{x^2}{4} \right) dx + \int_1^2 \left( 1 - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{5}{6}$$

Câu 39. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng  $y = \begin{cases} -x, & \text{nếu } x \leq 1 \\ x-2, & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$  và

$$y = \frac{10}{3}x - x^2 \text{ là } \frac{a}{b}. \text{ Khi đó } a+2b \text{ bằng}$$

- A. 17                                      B. 15                                      C. 16                                      D. 18

**Hướng dẫn giải**

**[Phương pháp tự luận]**

Ta có

$$\frac{10}{3}x - x^2 = -x \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{10}{3}x - x^2 = x - 2 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Nên } S = \int_0^1 \left( \frac{10}{3}x - x^2 + x \right) dx + \int_1^3 \left( \frac{10}{3}x - x^2 - x + 2 \right) dx = \frac{13}{2}$$

Câu 40. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $(C): y = \frac{-x^2 + 4x - 4}{x-1}$ , tiệm cận xiêm của  $(C)$  và hai đường thẳng  $x=0, x=a$  ( $a < 0$ ) có diện tích bằng 5. Khi đó  $a$  bằng

- A.  $1 - e^5$                                       B.  $1 + e^5$                                       C.  $1 + 2e^5$                                       D.  $1 - 2e^5$

**Hướng dẫn giải**

**[Phương pháp tự luận]**

Ta có

$$TCX : y = -x + 3$$

$$\text{Nên } S(a) = \int_a^0 \left( -\frac{1}{x-1} \right) dx = \int_0^a \left( \frac{1}{x-1} \right) dx = \ln|x-1| \Big|_0^a = \ln(1-a)$$

$$\text{Suy ra } \ln(1-a) = 5 \Leftrightarrow a = 1 - e^5$$

**II-Câu hỏi tính thể tích vật tròn xoay giới hạn bởi các đường:**

**Những điểm cần lưu ý:**

. **Tính thể tích khối tròn xoay:**

---



**Trường hợp 1.** Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y = f(x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = a$  và  $x = b$  ( $a < b$ ) **quay quanh trục Ox** là  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .

**Trường hợp 2.** Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ,  $x = a$  và  $x = b$  ( $a < b$ ) **quay quanh trục Ox** là

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$

### NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

**Câu 1.** Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y = \frac{4}{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$  quanh trục ox là:

A.  $12\pi$

B.  $6\pi$

C.  $6\pi$

D.  $6\pi$

#### Hướng dẫn giải

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là:  $V = \int_1^4 \pi \cdot \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 12\pi$ .

**Câu 2.** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \cos 4x$ , Ox,  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{8}$  quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A.  $\frac{\pi^2}{16}$

B.  $\frac{\pi^2}{2}$

C.  $\frac{\pi}{4}$

D.  $\left(\frac{\pi+1}{16}\right) \cdot \pi$

#### Hướng dẫn giải

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là:  $V = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \pi \cdot \cos^2 4x dx = \frac{\pi^2}{16}$ .

**Câu 3.** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = f(x)$ , Ox,  $x = a$ ,  $x = b$  quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A.  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .

B.  $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx.$

C.  $V = \int_a^b \pi^2 \cdot f^2(x) dx.$

D.  $V = \int_a^b f^2(x) dx.$

### Hướng dẫn giải

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là:  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

**Câu 4.** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{x-1}$ ; trục Ox và đường thẳng  $x=3$  quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

- A.  $2\pi$                       B.  $3\pi$                       C.  $\frac{3}{2}\pi$                       D.  $\pi$

Giao điểm của hai đường  $y = \sqrt{x-1}$  và  $y = 0$  là  $A(1;0)$ . Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là:  $V = \pi \int_1^3 (x-1) dx = 2\pi.$

**Câu 5.** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^3 + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

- A.  $\frac{23\pi}{14}$                       B.  $\frac{79\pi}{63}$                       C.  $\frac{5\pi}{4}$                       D.  $9\pi$

### Hướng dẫn giải

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là:  $V = \pi \int_0^1 (x^3 + 1)^2 dx = \frac{23\pi}{14}.$

**Câu 6.** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y^2 = x$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  ( $0 < a < b$ ) quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

- A.  $V = \pi \int_a^b x dx.$                       B.  $V = \pi \int_a^b \sqrt{x} dx.$   
C.  $V = \pi^2 \int_a^b x dx.$                       D.  $V = \pi^2 \int_a^b \sqrt{x} dx.$

### Hướng dẫn giải

Với  $x \in [a; b]$  thì  $y^2 = x \Leftrightarrow y = \sqrt{x}.$