

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1

1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Chứng minh hai đường chéo $B'D'$ và $A'B$ của hai mặt bên là hai đường thẳng chéo nhau. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $B'D'$ và $A'B$.
2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy $AB = a, AC = 2a, BAC = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh bên BB' , biết hai mặt phẳng (MAC) và $(MA'C')$ vuông góc với nhau. Tính thể tích khối lăng trụ và cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MAC) và $(BCC'B')$.
3. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $AA', B'C'$.
4. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$.
5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° ; tam giác ABC vuông tại C và $BAC = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Tính thể tích khối tứ diện $A'ABC$ theo a .
6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC) .
7. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a .
8. Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$

trùng với giao điểm AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a .

Bài 2

Cho hình tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) ;

$$AC = AD = 4\text{cm}; AB = 3\text{cm} \text{ và } BC = 5\text{cm}.$$

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) .

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BD, BC . Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và AN .

Bài 3

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $AB = a, AD = 2a, SA = 3a$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD và P là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) .

a) Tính thể tích khối chóp $S.AMPN$

b) Tính khoảng cách và cosin của góc giữa DM và CN .

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B ; $AB = AD = 2a; CB = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$

bằng 60° . Gọi I là trung điểm của cạnh AB . Biết hai mặt phẳng (SDI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, AD = \sqrt{2}a, SA = a$ và vuông góc với $mp(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, SC . Gọi I là giao điểm của BM, AC . Chứng minh $mp(SAC)$ vuông góc với (SMB) . Tính thể tích của khối tứ diện $ANIB$.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD . Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA . M là trung điểm của

AE, N là trung điểm của BC . Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC .

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD ; H là giao điểm của CN và DM . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a .

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC , $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC .

Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a .

Bài 4

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $BAC = 120^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) tạo với nhau một góc 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và $S.AMN$.

2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy là a . Gọi M, N là trung điểm SB, SC . Tính theo a diện tích $\triangle AMN$, biết (AMN) vuông góc với (SBC) .

3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với $mp(ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC . Tính thể tích của khối chóp $A.BCMN$.

4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\angle SBC = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a .

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 5 Cho hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = a, OB = b, OC = c$.

1. Chứng minh rằng $OH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$ khi và chỉ khi H là trực tâm của tam giác ABC ;

2. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) ;
3. Cho M là một điểm bất kỳ trên mặt phẳng (ABC) , không trùng với A, B, C, H (H trực tâm tam giác ABC). Chứng minh rằng:

$$\frac{AM^2}{AO^2} + \frac{BM^2}{BO^2} + \frac{CM^2}{CO^2} = 2 + \frac{HM^2}{HO^2};$$

4. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các mặt bên với mặt đáy. Chứng minh:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \sin \beta \sin \gamma} + \frac{\sin^2 \beta}{1 + \sin \gamma \sin \alpha} + \frac{\sin^2 \gamma}{1 + \sin \alpha \sin \beta} \geq \frac{6}{5}.$$

Bài 6

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, $ABC = BAD = 90^\circ$,

$BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = \sqrt{2}a$.
Gọi H là hình chiếu của A lên SB . Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến $mp(SCD)$.

Bài 7 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B với $AB = BC = a; AD = 2a; A \equiv O, B$ thuộc tia Ox , D thuộc tia Oy và S thuộc tia Oz . Đường thẳng SC và BD tạo với nhau một góc α thỏa $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{30}}$.

1. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chóp
2. Chứng minh rằng $\triangle SCD$ vuông, tính diện tích tam giác SCD và tính cô sin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
3. Gọi E là trung điểm cạnh AD . Tìm tọa độ tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$.
4. Trên các cạnh SA, SB, BC, CD lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q thỏa $SM = MA, SN = 2NB, BP = 3PC, CQ = 4QD$. Chứng minh rằng M, N, P, Q không đồng phẳng và tính thể tích khối chóp $MNPQ$.

Bài 8 Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M là trung điểm CC' , biết $AM \perp B'M$. Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho $A \equiv O, C$ thuộc tia Ox , A' thuộc tia Oz và B thuộc miền góc xOy .

1. Xác định tọa độ các đỉnh của lăng trụ,
2. Trên các cạnh $A'B', A'C', BB'$ lần lượt lấy các điểm N, P, Q thỏa $A'N = NB'$

$A'P = 2C'P$, $B'Q = 3BQ$. Tính thể tích khối đa diện $AMPNQ$.

Bài 9 Cho hai đường thẳng Δ , Δ' chéo nhau và vuông góc với nhau nhận AB làm đường vuông góc chung ($A \in \Delta$, $A' \in \Delta'$). Gọi M, N là các điểm di chuyển trên Δ và Δ' sao cho $MN = AM + BN$.

1. Chứng minh rằng tích $AM \cdot BN$ và thể tích khối tứ diện $ABMN$ là những đại lượng không đổi.

2. Chứng minh rằng MN luôn tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB .

Bài 10 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = 2a$ đường cao $SA = 2a$. Trên cạnh CD lấy điểm M sao cho $MD = x (0 \leq x \leq a)$.

1. Tìm vị trí của M để diện tích tam giác SBM lớn nhất, nhỏ nhất.

2. Tìm vị trí của M để $mp(SBM)$ chia hình chóp thành hai phần sao cho :

$$V_{C.SBM} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD}.$$

Bài 11

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $1cm$, các cạnh bên SA, SB, SC có độ dài cùng bằng $1cm$. Tính độ dài cạnh SD sao cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất.

2. Tứ diện đều $ABCD$ có tâm là S và có độ dài các cạnh bằng 2. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là hình chiếu của các đỉnh A, B, C, D trên đường thẳng nào Δ đó đi qua S . Tìm tất cả các vị trí của đường thẳng Δ sao cho biểu thức

$P = SA'^4 + SB'^4 + SC'^4 + SD'^4$ đạt giá trị lớn nhất.