

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

Vấn đề 1. XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TỌA ĐỘ VECTO

Phương pháp:

- Dựa vào định nghĩa tọa độ của điểm, tọa độ của véc tơ
- Dựa vào các phép toán véc tơ

Áp dụng các tính chất sau:

Cho các vector $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ và số thực k tùy ý. Khi đó ta có

$$a) \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$$

$$b) \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$$

$$c) \vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$$

$$d) k\vec{u} = (ku_1; ku_2; ku_3)$$

Ví dụ 1.1.6 Cho hai véc tơ \vec{a}, \vec{b} thỏa $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$

1. Tính $|\vec{a} - 2\vec{b}|$

2. Tính góc giữa hai véc tơ \vec{a} và $\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

Lời giải.

$$1. \text{ Ta có: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = -3$$

$$\Rightarrow (\vec{a} - 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 2^2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 = 52 \Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{13}$$

$$2. \text{ Ta có: } \vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{a} \cdot (3\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \text{ và } |\vec{x}| = \sqrt{(3\vec{a} + 2\vec{b})^2} = 6$$

$$\text{Suy ra } \cos(\vec{x}, \vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{x}|} = \frac{6}{2 \cdot 6} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{x}) = 60^\circ.$$

Ví dụ 2.1.6 Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ

$$\vec{a} = (1; 0; -2), \vec{b} = (-2; 1; 3), \vec{c} = (-4; 3; 5)$$

1. Tìm tọa độ vectơ $3\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c}$
2. Tìm hai số thực m, n sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$.

Lời giải.

1. Tọa độ vectơ $3\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c}$

$$\vec{a} = (1; 0; -2) \Rightarrow 3\vec{a} = (3; 0; -6),$$

$$\vec{b} = (-2; 1; 3) \Rightarrow -4\vec{b} = (8; -4; -12),$$

$$\vec{c} = (-4; 3; 5) \Rightarrow 2\vec{c} = (-8; 3; 10),$$

$$\text{Suy ra } 3\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c} = (3 + 8 - 8; 0 - 4 + 3; -6 - 12 + 10) = (3; -1; 4).$$

2. Tìm m, n .

$$\text{Ta có } m\vec{a} + n\vec{b} = (m - 2n; n; -2m + 3n),$$

$$\text{Suy ra } m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2n = -4 \\ n = 3 \\ -2m + 3n = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}.$$

Ví dụ 3.1.6 Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có A(2; -3; 1),

B(1; -1; 4) và C(-2; 1; 6).

1. Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC;
2. Xác định tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành và tọa độ giao điểm hai đường chéo của hình bình hành này;
3. Xác định tọa độ điểm M sao cho $\vec{MA} = -2\vec{MB}$

Lời giải.

1. Xác định tọa độ trọng tâm G.

Theo tính chất của trọng tâm G, ta có:

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = -1 \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{11}{3} \end{cases}.$$

2. Xác định tọa độ điểm D.

Vì A,B,C là ba đỉnh của một tam giác ,do đó

$$\begin{aligned} ABCD \text{ là hình bình hành} &\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \\ z_B - z_A = z_C - z_D \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -2 - x_D \\ 2 = 1 - y_D \\ 3 = 6 - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy D(-1;-1;3).

Giao điểm I của hai đường chéo AC và BD của hình bình hành ABCD là trung

$$\text{điểm của AC ,suy ra I} \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = 0 \\ y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = -1 \\ z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

3. Xác định tọa độ M.

Gọi (x; y; z) là tọa độ của M,ta có

$$\overline{MA} = -2\overline{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = -2(1 - x) \\ -3 - y = -2(-1 - y) \\ 1 - z = -2(4 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = 3 \end{cases}$$

Ví dụ 4.1.6 Cho tam giác ABC có A(1;0;-2),B(-1;1;0),C(-2;4;-2).

1. Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC.
2. Tìm tọa độ giao điểm của phân giác trong, phân giác ngoài góc A với đường thẳng BC.

Lời giải.

1. $\overline{AB}(-2;1;2), \overline{BC}(-1;3;-2), \overline{CA}(3;-4;0).$

Trọng tâm $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right).$

Ta có $[\overline{AB}; \overline{AC}] = (-8; -6; -5)$. Tọa độ điểm H thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} \overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0 \\ \overline{BH} \cdot \overline{CA} = 0 \\ [\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = -3 \\ 3x - 4y = -7 \\ 8x + 6y + 5z = -2 \end{cases} \Rightarrow H \left(-\frac{29}{25}; \frac{22}{25}; \frac{2}{5} \right).$$

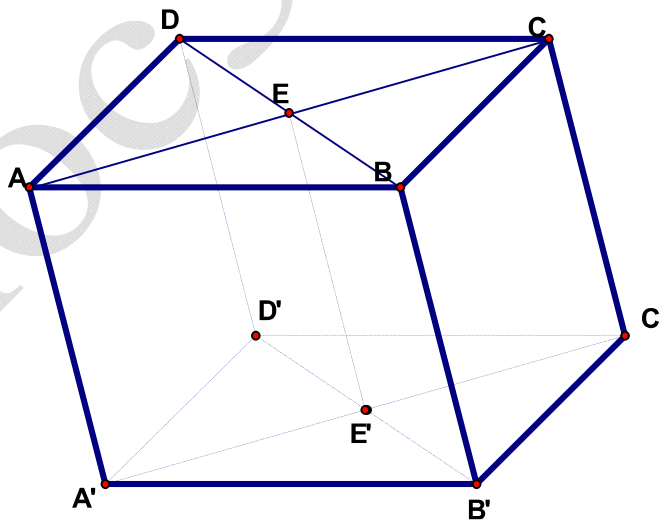
Tọa độ điểm I thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ [\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y - 4z = 3 \\ 6x - 8y = -19 \\ 8x + 6y + 5z = -2 \end{cases} \Rightarrow I \left(-\frac{21}{50}; \frac{103}{50}; -\frac{11}{5} \right).$$

2. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của phân giác trong, phân giác ngoài góc A với đường thẳng BC. Từ $\frac{EB}{EC} = \frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$ ta tính được tọa độ các điểm $E \left(-\frac{11}{8}; -\frac{7}{8}; -\frac{3}{4} \right)$, $F \left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}; 3 \right)$.

Ví dụ 5.1.6 Trong không gian Oxyz, , cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có A(-1,2,3), C(1; 4; 5), B'(-3;3;-2), D'(5;3;2). Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

Lời giải.



Gọi E, E' lần lượt là trung điểm của AC và $B'D'$ thì ta có

$$\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} \text{ và}$$
$$\begin{cases} x_E = \frac{x_A + x_C}{2} = 0 \\ y_E = \frac{y_A + y_C}{2} = 3 \\ z_E = \frac{z_A + z_C}{2} = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_{E'} = \frac{x_{B'} + x_{D'}}{2} = 1 \\ y_{E'} = \frac{y_{B'} + y_{D'}}{2} = 3 \\ z_{E'} = \frac{z_{B'} + z_{D'}}{2} = 0 \end{cases}$$

Suy ra $\overrightarrow{EE'} = (1; 0; -4)$

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{EE'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} + 1 = 1 \\ y_{A'} - 2 = 0 \\ z_{A'} - 3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow A'(0; 2; -1).$$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{EE'} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x_B = 1 \\ 3 - y_B = 0 \\ -2 - z_B = -4 \end{cases} \Leftrightarrow B(-4; 3; 2).$$

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{EE'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} - 1 = 1 \\ y_{C'} - 4 = 0 \\ z_{C'} - 5 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow C'(2; 4; 1)$$

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{EE'} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x_D = 1 \\ 3 - y_D = 0 \\ 2 - z_D = -4 \end{cases} \Leftrightarrow D(4; 3; 6)$$

Ví dụ 6.1.6 Cho hình chóp $S.ABCD$ với điểm $A(4; -1; 2)$, $B(-1; 0; -1)$ và $C(0; 0; -2)$, $D(10; -2; 4)$. Gọi M là trung điểm của CD . Biết SM vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = 66$ (đvtt). Tìm tọa độ đỉnh S .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-5; 1; -3)$, $\overrightarrow{DC}(-10; 2; -6) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$ nên $ABCD$ là hình thang và

$$S_{ADC} = 2S_{ABC}, \text{ hay } S_{ABCD} = 3S_{ABC}.$$