

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1

1. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng $(A'B'C')$ một góc 60° và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{3a}{2}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lăng trụ biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30° .
3. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M là trung điểm cạnh CC' , biết $AM \perp B'M$. Hãy tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và cô sin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (AMB') với (ABC) .
4. Cho lăng trụ đứng tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh đáy bằng a , đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a .
5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC) .

Bài 2

1. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.
2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và hình chiếu của A' lên $mp(ABC)$ trùng với trung điểm của BC . Tính thể tích của khối lăng trụ đó.
3. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là ABC là tam giác cân tại A , $AB = AC = a, BAC = 120^\circ$, hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Tính thể tích khối lăng trụ biết cạnh bên $AA' = 2a$.

4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và hình chiếu của đỉnh C trên mặt phẳng $(ABB'A')$ là tâm của hình bình hành $ABB'A'$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

5. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng h và hai đường thẳng AB', BC' vuông góc với nhau. Tính thể tích khối lăng trụ và diện tích xung quanh của nó.

Bài 3

1. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, A'A = A'B = A'C = b$. Tìm b để góc giữa mặt bên $(ABB'A')$ và mặt đáy bằng 60° và tính thể tích của khối lăng trụ khi đó.

2. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy a . Mặt phẳng (ABC') hợp với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc α . Tính thể tích và diện tích xung quanh của khối lăng trụ.

3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác cân tại $A, AB = AC = a, BAC = \alpha$. Gọi M là trung điểm của $A'A$. Tính thể tích của khối lăng trụ biết tam giác $C'MB$ vuông.

4. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại $A, BC = a, ABC = \alpha$. Các mặt phẳng $(A'AB), (A'BC), (A'CA)$ nghiêng đều trên đáy một góc β . Hình chiếu của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) thuộc miền trong tam giác ABC . Chứng minh thể tích của khối lăng

trụ $ABC.A'B'C'$ được tính theo công thức
$$V = \frac{\sqrt{2}.a^3 \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \tan \beta}{32 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}$$

5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Khoảng cách từ đường thẳng AA' đến mặt phẳng $(BB'C'C)$ bằng a , khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(C'AB)$ bằng b , mặt phẳng $(C'AB)$ tạo với đáy góc α . Tính thể tích của khối lăng trụ.

Bài 4

1. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$. Mặt phẳng $(B'AC)$ tạo với đáy một góc 30° , khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(D'AC)$ bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối hộp biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{a}{2}$.

Bài 5

1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a , $BAD = 60^\circ$, $BAA' = 90^\circ$, $DAA' = 120^\circ$. Tính thể tích khối hộp.
2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a , các góc $BAA' = BAD = DAA' = 60^\circ$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo a .
3. Cho hình hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a , $BAA' = BAD = DAA' = \alpha$, ($0 < \alpha < 90^\circ$). Tính thể tích của khối hộp theo a và α .

Bài 6

1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = 2a$, $AA' = 3a$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với CA' lần lượt cắt các đoạn thẳng CC' và BB' tại M, N . Tính diện tích tam giác AMN .
2. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên là h . Từ một đỉnh vẽ hai đường chéo của hai mặt bên kề nhau. Góc giữa hai đường chéo đó có số đo là α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đã cho.

Bài 7

1. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M là trung điểm của cạnh AA' . Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (BMC') biết $BM \perp AC'$.
2. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, cạnh đáy a . Mặt phẳng (ABC') hợp với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc có số đo là α ($0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$). Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BC và BC' .
 - a) Chứng minh $\angle AIJ = \alpha$.
 - b) Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và diện tích xung quanh của hình lăng trụ đó.

3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AC = 2a$ và $BAC = 120^\circ$.

Gọi M là trung điểm cạnh CC' thì $BMA' = 90^\circ$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BMA') .

4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BC = a, BA'C = 90^\circ$. Các đường thẳng BA', CA' tạo với mặt phẳng đáy các góc tương ứng α, β ($\alpha < \beta$). Tính thể tích của lăng trụ và khoảng cách từ B' đến (BCA') .

Bài 8

1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = b, AA' = c$. Gọi M là điểm chia đoạn AD theo tỉ số -3 . Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(AB'C)$.

2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác cân tại A . Góc giữa hai đường thẳng AA' và BC' là 30° và khoảng cách giữa chúng là a . Góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt bên qua AA' là 60° . Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

3. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi K là trung điểm của DD' . Tính khoảng cách giữa CK và $A'D$.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 9

1. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại $A, AC = a, ACB = \alpha$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc β . Tính thể tích khối lăng trụ đó.

2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông thỏa mãn $AB = AC = a$. Góc giữa hai đường thẳng AC' và $A'B$ bằng α . Tính thể tích khối lăng trụ theo a và α .

3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = a, BC = 2a$. Mặt bên $ABB'A'$ là hình thoi, mặt bên $BCC'B'$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, hai mặt này hợp với nhau một góc bằng α .

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$. Xác định góc α .

b) Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $A = 60^\circ$. Chân đường vuông góc hạ từ B' xuống mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của hai đường chéo của đáy $ABCD$. Cho $BB' = a$.

a) Tính góc giữa cạnh bên và đáy.

b) Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình hộp .

Bài 10

1. Cho hình lăng trụ $AB.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh

a , $A'A = A'B = A'C$, $BAA' = \alpha$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

2. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a , đường chéo BC' hợp với mặt bên $(ABB'A')$ một góc α . Tính thể tích, diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của khối lăng trụ. Xác định góc α để hình lăng trụ đó tồn tại.

Bài 11

1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của BC , N thuộc cạnh CD thỏa $\frac{CN}{CD} = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng $(A'MN)$ chia khối lập phương thành hai khối, gọi (H) là khối chứa điểm A . Tính thể tích của khối (H) theo a .

2. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $BAD = \alpha$ ($0 < \alpha \leq 90^\circ$). Tính thể tích của khối lăng trụ biết rằng hai đường thẳng AB' và BD' vuông góc.

3. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là hình thoi. Biết diện tích hai mặt chéo $ACC'A'$ và $BDD'B'$ là s_1, s_2 , góc $BA'D = 90^\circ$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo s_1 và s_2 .

Bài 12

1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt bên hợp và mặt $(A'BD)$ với đáy góc 60° , biết góc $BAD = 60^\circ$, $AB = 2a$, $BD = a\sqrt{7}$. Tính

$V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

2. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Mặt phẳng $(A'BC)$ cách A một khoảng cách bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ và hợp với BC' một góc α biết $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{10}$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Cho $BAA' = 45^\circ$.

a) Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

b) Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Bài 13

1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Khoảng cách từ AA' đến $(BCC'B')$ bằng a , khoảng cách từ C đến (ABC') bằng b , góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng φ .

a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a, b và φ .

b) Khi $a = b$ không đổi, hãy xác định φ để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ nhỏ nhất.

2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều nội tiếp trong đường tròn (O) tâm O . Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) là O . Khoảng cách giữa AB và CC' là d . Góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt bên $ACC'A'$ và $BCC'B'$ là 2φ $0 < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$.

a) Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

b) Gọi α ($0 < \alpha \leq 90^\circ$) là góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) . Tính φ biết $\alpha + \varphi = 90^\circ$.

Bài 14

1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa đường chéo AC' và mặt đáy $(ABCD)$ bằng 30° và $AC' = a$, $AC'B = \varphi$. Tính thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ theo a và φ . Giả sử a không đổi, tìm φ để thể tích khối hộp lớn nhất.

2. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ có $BD = a$ không đổi và $BAD = DCB = 90^\circ$, $ABD = \alpha$, $CBD = \beta$. Mặt phẳng $(AA'C'C)$ là hình thoi, vuông góc với đáy và $A'AC = 60^\circ$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ và tìm α, β để thể tích đó lớn nhất.

3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có đường chéo $AC' = d$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc α , hợp với mặt bên $(BCC'B')$ góc β . Tìm hệ thức liên hệ giữa α, β để tứ giác $A'D'CB$ là hình vuông và tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối hộp chữ nhật khi đó.

4. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Tam giác ABC' có diện tích $Q\sqrt{3}$ và hợp với mặt phẳng đáy một góc có số đo bằng α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

a) Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo Q và α .

b) Cho Q không đổi và α thay đổi. Tính α để thể tích V lớn nhất.

5. Gọi $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ là các góc của đường chéo hình hộp chữ nhật với ba cạnh cùng phát xuất từ một đỉnh và ba mặt cùng phát xuất từ một đỉnh. Chứng minh :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 ; \sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \beta_1 + \sin^2 \gamma_1 = 1 .$$