

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1

1. Cho hình chóp $S.ABC$, mặt bên (SBC) là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$. Biết góc $BAC = 120^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .
2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác SAC cân tại S , $SBC = 60^\circ$, mặt phẳng (SAC) vuông góc với (ABC) . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.
3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Hình chiếu của S lên mặt đáy trùng với điểm H là trung điểm của AO . Mặt phẳng (SAD) tạo với đáy một góc 60° và $SC = a$. Tính $V_{S.ABCD}$ và $d(AB, SC)$.
4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi; hai đường chéo $AC = 2a\sqrt{3}$, $BD = 2a$ và cắt nhau tại O ; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .
5. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại C có $AB = 2a$, $AC = a$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) tạo với nhau một góc 60° . Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.
6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = 2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .
7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân $AB = BC = a$, đường cao $SA = a$. Gọi B' là trung điểm của SB , C' là chân đường cao hạ từ A của tam giác SAC . Chứng minh $SC \perp (AB'C')$ và tính thể tích khối chóp $S.AB'C'$.
8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác cân tại A , độ dài trung tuyến $AD = a$, cạnh bên SB tạo với đáy một góc α và tạo với mặt phẳng (SAD) góc β . Tính thể tích khối chóp đó.

9. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác cân $AB = AC$, cạnh $BC = a, \angle BAC = \alpha$. Các cạnh bên cùng tạo với mặt phẳng đáy một góc β . Tính thể tích khối chóp theo a, α, β .

10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, AD = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N . Tính thể tích khối chóp $S.BCMN$.

Bài 2

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = 5a, BC = 6a, CA = 7a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết:

- Cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với đáy một góc 60°
- Cạnh bên bằng $2a$ và $SA \perp BM$, với M là trung điểm SC .

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và $AB = BD = a, SA = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$. Gọi M là điểm trên cạnh SB sao cho $BM = \frac{2}{3}SB$, giả sử N là điểm di động trên cạnh AD . Tìm vị trí của điểm N để $BN \perp DM$ và khi đó tính thể tích của khối tứ diện $BDMN$.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , tam giác SAD đều có cạnh bằng $2a, BC = 3a$. Các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC ; I là giao điểm của BM và AC . Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB) . Tính thể tích của khối tứ diện $ANIB$.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a, SA \perp (ABCD), SC$ tạo với mặt phẳng đáy góc 45° và tạo với mặt phẳng (SAB) góc 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = 2a$ $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và BC , E là giao điểm của mặt phẳng (DMN) với cạnh bên SB .

Tính thể tích khối chóp $S.DMEN$ theo a biết rằng $\angle DMN = 30^\circ$.

8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a .

a) Hãy tính thể tích của khối chóp, diện tích toàn phần và diện tích mặt chéo của hình chóp $SABCD$.

b) Tính khoảng cách từ A đến (SCD) .

9. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên tạo với đáy một góc 60° và cạnh đáy bằng a .

a) Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

b) Qua A dựng mặt phẳng (P) vuông góc với SC . Tính diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a và đường cao bằng h .

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC . (P) cắt các cạnh

SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' .

a) h phải thỏa mãn điều kiện gì để C' là một điểm thuộc cạnh SC .

b) Tính thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$.

c) Chứng minh tam giác $B'C'D'$ luôn có một góc tù.

Bài 3

1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tính thể tích khối chóp biết

a) Cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$ và mặt bên tạo với đáy một góc 60°

b) Đường cao của hình chóp tạo với đáy một góc 45° và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng $2a$.

2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt đáy. Tính thể tích của khối chóp biết:

a) Cạnh bên bằng b , góc giữa mặt bên và mặt đáy là α .

b) Cạnh đáy bằng a , khoảng cách từ trung điểm của SH đến mặt phẳng (SCD) bằng k .

3. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , khoảng cách giữa

cạnh đáy và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và CD .

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng SP .

b) Tính theo a thể tích của khối tứ diện $AMNP$.

5. Một hình chóp $S.ABC$ có hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tam giác ABC là một tam giác cân đỉnh A , trung tuyến $AD = a$, đường thẳng SB hợp với mặt phẳng (ABC) một góc bằng α và hợp với mặt phẳng (SAD) một góc bằng β .

a) Xác định các góc α, β .

b) Chứng minh $SB^2 = SA^2 + AD^2 + BD^2$.

c) CM thể tích của khối chóp $S.ABC : V = \frac{a^3 \sin \alpha \sin \beta}{3 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}$.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, SC hợp với đáy góc α và hợp với mặt bên SAB một góc β .

a) Chứng minh rằng $SC^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$.

b) Tính thể tích của khối chóp đã cho.

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có góc nhọn A bằng α . Hai mặt bên $(SAB), (SAD)$ vuông góc với mặt phẳng chứa đáy, hai mặt bên còn lại hợp với mặt phẳng đáy góc β . Cho $SA = a$.

a) Tính diện tích xung quanh của hình chóp $S.ABCD$.

b) Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

c) Gọi φ là góc hợp bởi đường thẳng SB với mặt phẳng (SAC) . Chứng tỏ rằng

$$\sin \varphi = \frac{\cot \beta \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cot^2 \beta}}$$

Bài 4 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) . Tính thể tích của khối chóp biết

1. Cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b .

2. Cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy là α .

3. Chiều cao bằng h và $ASB = \beta$.

4. Trung đoạn bằng d , góc giữa cạnh bên và mặt đáy là φ .

Bài 5

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt SBC và ABC là những tam giác đều cạnh a , góc giữa hai mặt phẳng đó là 60° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .
2. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $BA = a$, $BC = 2a$, $SA = 2a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC . Tính khoảng cách từ điểm K đến mặt phẳng (SAB) .
3. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của SB, SC . Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABC') biết rằng $(SBC) \perp (AB'C')$.

Bài 6

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và điểm H chia đoạn MN theo tỉ số $-\frac{1}{3}$. Mặt phẳng (SAB) tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SAC) biết rằng $SH \perp (ABCD)$.
2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh $\sqrt{5}a$, $AC = 4a$, $SO = 2\sqrt{2}a$ và SO vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM .
3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông với đáy lớn AB , đường cao AD . Các mặt bên tạo với mặt phẳng đáy một góc φ và chân đường cao I của hình chóp nằm trong hình thang $ABCD$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) biết rằng $IC = 3a, IB = 4a$.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 7 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có góc ở đáy của một mặt bên là

$\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$, chiều cao $SH = h$ (H là giao điểm của AC và BD).

1. Tính diện tích xung quanh của hình chóp và thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo h và α . Tìm điều kiện của α để bài toán có nghĩa.
2. Gọi I là trung điểm của SD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SH và CI theo h và α .
3. Cho điểm M di động trên cạnh SC . Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (MAB) .

Bài 8 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên là a , góc giữa mặt bên và mặt đáy (ABC) là $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$

1. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a và α .
2. Cho a không đổi và α biến thiên trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, khi đó tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $SABC$.
3. Xác định α để hình chóp $S.ABC$ trở thành tứ diện đều.

Bài 9

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $ASB = 60^\circ$, $BSC = 90^\circ$, $CSA = 120^\circ$. Gọi E là trung điểm của SB . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$; góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CE .
2. Cho khối chóp $S.ABC$, đáy ABC có $AB = a, AC = b, BAC = \alpha$. Cạnh bên $SA = c$ và $SAB = SAC = \beta$, $(0 < \beta < 90^\circ)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.
3. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = x$. Trên đường thẳng $\Delta \perp (ABC)$ tại điểm M , lấy S sao cho $MS = MA$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Mặt phẳng (SMI) cắt đường thẳng AC tại N ($NA > NC$). Tìm x để $V_{SMBI} + V_{SCNI} = V_{SABC}$.
4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , mặt bên có góc ở đáy là $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$. Chứng minh rằng diện tích của thiết diện qua một cạnh bên và đường cao vẽ từ S của hình chóp đã cho là

$$\frac{a^2}{4 \cos \alpha} \sqrt{\sin(\alpha + 30^\circ) \sin(\alpha - 30^\circ)}.$$

Bài 10 Cho hình chóp đều $S.ABCD$, đường cao SH . Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ biết:

1. Cạnh đáy bằng a và khoảng cách từ trung điểm I của SH đến (SBC) bằng b
 2. Cạnh bên bằng b và mặt bên tạo với đáy một góc $\alpha \left(0^\circ < \alpha < 90^\circ \right)$.
- Đồng thời hãy xác định α để $V_{S.ABCD}$ lớn nhất.

Bài 11

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SBD) tạo với đáy một góc 60° . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD . Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P . Tính thể tích khối chóp $S.AMPN$.
2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD ; H là giao điểm của CN và DM . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a .
3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC , $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC . Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a .
4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN .
5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD . Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.
6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA , M là trung điểm của AE , N là trung điểm của BC . Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC .

Bài 12

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 3a, AD = DC = a$. Gọi I là trung điểm AD , biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ trung điểm cạnh SD đến mặt phẳng (SBC) .

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AB = AD = 2a, CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi I là trung điểm của cạnh AD . Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .
3. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, $ABC = BAD = 90^\circ$
 $BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB . Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến (SCD) .

Bài 13 Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh đáy $AB = 5a, BC = 6a, AC = 7a$. Các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau và bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) . Biết hình chiếu của đỉnh S thuộc miền trong tam giác ABC .

Bài 14

1. Cho tứ diện $ABCD$ với năm cạnh có độ dài bằng a và cạnh $AD = x, 0 < x < a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$ và tìm x theo a để thể tích đó đạt giá trị lớn nhất.
2. Gọi V là thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có các cạnh thỏa mãn điều kiện $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$. Chứng minh:

$$V \leq \frac{\sqrt{2}abc}{12}.$$

3. Cho tứ diện gần đều $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$. Tính thể tích của khối tứ diện.

Bài 15

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$. Tính SD theo a để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất.

2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và $ASB = \alpha$, $BSC = \beta$, $CSA = \gamma$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a, α, β, γ .
3. Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có cạnh $SC = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng a , ($0 < x < a\sqrt{3}$). Tính thể tích khối chóp và tìm x theo a để thể tích đó lớn nhất.