

TỔ HỢP

Một hộp có 6 quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6, 5 quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5, 4 quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 4.

a. Có bao nhiêu cách lấy 3 quả cầu cùng màu, 3 quả cầu cùng số.

b. Có bao nhiêu cách lấy 3 quả cầu khác màu? 3 quả cầu khác màu và khác số.

LỜI GIẢI

a. Số cách lấy 3 quả cầu cùng xanh: $C_6^3 = 20$ cách.

Số cách lấy 3 quả cầu cùng màu đỏ: $C_5^3 = 10$ cách.

Số cách lấy 3 quả cầu cùng vàng: $C_4^3 = 4$ cách.

Vậy số cách lấy 3 quả cầu cùng màu là: $20 + 10 + 4 = 34$ cách.

Số cách lấy 3 quả cầu cùng số 1 là 1.

Số cách lấy 3 quả cầu cùng số 2 là 1.

Số cách lấy 3 quả cầu cùng số 3 là 1.

Số cách lấy 3 quả cầu cùng số 4 là 1.

Vậy số cách lấy 3 quả cầu cùng số là: 4

b. Số cách lấy 1 quả cầu xanh: 6

Số cách lấy 1 quả cầu đỏ: 5

Số cách lấy 1 quả cầu vàng: 4

Vậy số cách lấy 3 quả cầu khác màu là $6 \times 5 \times 4 = 120$

* Chọn bất kì 1 quả cầu vàng V_i ($i = 1, 2, 3, 4$) có 4 cách.

* Chọn 1 quả cầu đỏ G_j có 4 cách (vì $i \neq j$)

* Chọn 1 quả cầu xanh X_k có 4 cách (vì $k \neq j, k \neq i$)

Do đó số cách chọn 3 bi khác màu, khác số là:

$4 \times 4 \times 4 = 64$ cách.

Một hộp đựng 15 viên bi khác nhau gồm 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Tính số cách chọn 4 viên bi từ hộp đó sao cho không có đủ 3 màu.

LỜI GIẢI

+ Trường hợp 1: chọn 4 bi đỏ hoặc trắng có $C_9^4 = 126$ cách.

+ Trường hợp 2: chọn 4 bi đỏ và vàng hoặc 4 bi trắng và vàng có $C_{10}^4 - C_4^4 = 209$ cách.

+ Trường hợp 3: chọn 4 bi trắng và vàng có $C_{11}^4 - (C_5^4 + C_6^4) = 310$ cách.

Vậy có $126 + 209 + 310 = 645$ cách.

Cách khác:

+ Loại 1: chọn tùy ý 4 trong 15 viên bi có $C_{15}^4 = 1365$ cách.

+ Loại 2: chọn đủ cả 3 màu có 720 cách gồm các trường hợp sau:

- Chọn 2 bi đỏ, 1 bi trắng và 1 bi vàng có 180 cách.

- Chọn 1 bi đỏ, 2 bi trắng và 1 bi vàng có 240 cách.

- Chọn 1 bi đỏ, 1 bi trắng và 2 bi vàng có 300 cách.

Vậy có $1365 - 720 = 645$ cách.

Bài 2: Có 8 bông đỏ, 9 bông trắng, 10 bông vàng. Hỏi có bao nhiêu cách tạo nên một bó hoa gồm 6 bông, trong đó có số bông vàng nhiều hơn số bông đỏ hay nhiều hơn số bông trắng?

LỜI GIẢI

Có các trường hợp sau xảy ra thỏa mãn yêu cầu bài toán:

Trường hợp 1: Có 4 bông vàng, 1 bông đỏ và 1 bông trắng, có $C_{10}^4 \cdot C_8^1 \cdot C_9^1$ cách.

Trường hợp 2: Có 3 bông vàng, 1 bông đỏ và 2 bông trắng, có $C_{10}^3 \cdot C_8^1 \cdot C_9^2$ cách.

Trường hợp 3: Có 3 bông vàng, 2 bông đỏ và 1 bông trắng, có $C_{10}^3 \cdot C_8^2 \cdot C_9^1$ cách.

Trường hợp 4: Có 5 bông vàng và 1 bông trắng, có $C_{10}^5 \cdot C_9^1$ cách.

Trường hợp 5: Có 4 bông vàng và 2 bông trắng, có $C_{10}^4 \cdot C_9^2$ cách.

Trường hợp 6: Có 5 bông vàng và 1 bông đỏ, có $C_{10}^5 \cdot C_8^1$ cách.

Trường hợp 7: Có 4 bông vàng và 2 bông đỏ, có $C_{10}^4 \cdot C_8^2$ cách.

Trường hợp 8: Cả 6 bông đều vàng, có C_{10}^6 cách.

Vậy có

$$C_{10}^4 \cdot C_8^1 \cdot C_9^1 + C_{10}^3 \cdot C_8^1 \cdot C_9^2 + C_{10}^3 \cdot C_8^2 \cdot C_9^1 + C_{10}^5 \cdot C_9^1 + C_{10}^4 \cdot C_9^2 + C_{10}^5 \cdot C_8^1 + C_{10}^4 \cdot C_8^2 + C_{10}^6 = 97854$$

cách chọn một bó bông thỏa yêu cầu của đề.

Bài 3: Một nhóm có 6 học sinh nữ và 7 học sinh nam. Có bao nhiêu cách chọn ra một tổ học tập có 5 học sinh, trong đó có một tổ trưởng, một tổ phó, một thủ quỹ và hai tổ viên, biết rằng tổ trưởng phải là nam và thủ quỹ phải là nữ.

LỜI GIẢI

Ta thực hiện các công đoạn sau:

Bước 1: Chọn 1 nam trong 7 nam làm tổ trưởng, có C_7^1 cách.

Bước 2: Chọn 1 nữ trong 6 nữ làm thủ quỹ, có C_6^1 cách.

Bước 3: Chọn 1 tổ phó trong 11 bạn còn lại (bỏ 2 bạn đã chọn ở bước 1 và bước 2), có C_{11}^1 cách.

Bước 4: Chọn 2 tổ viên trong 10 bạn còn lại (loại 3 bạn đã chọn ở trên), có C_{10}^2 cách.

Theo quy tắc nhân có $C_7^1 \cdot C_6^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^2 = 20790$ cách chọn một tổ thỏa yêu cầu.

Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn 5 học sinh lập thành một đoàn đại biểu để tham gia tổ chức lễ khai giảng. Hỏi có bao nhiêu cách :

- Chọn ra 5 học sinh, trong đó có không quá 3 nữ.
- Chọn ra 5 học sinh, trong đó có 3 nam và 2 nữ.
- Chọn ra 5 học sinh, trong đó có ít nhất một nam.

- d. Chọn ra 5 học sinh, trong đó anh A và chị B không thể cùng tham gia cùng đoàn đại biểu.
- e. Chọn ra 5 học sinh, trong đó anh X và chị Y chỉ có thể hoặc cùng tham gia đoàn đại biểu hoặc cùng không tham gia.

LỜI GIẢI

a. Ta thấy :

- * có $C_{15}^3 \cdot C_{25}^2$ cách chọn đoàn có 3 nữ và 2 nam ;
- * có $C_{15}^2 \cdot C_{25}^3$ cách chọn đoàn có 2 nữ và 3 nam ;
- * có $C_{15}^1 \cdot C_{25}^4$ cách chọn đoàn có 1 nữ và 4 nam ;
- * có $C_{15}^0 \cdot C_{25}^5$ cách chọn đoàn có 0 nữ và 5 nam.

Vậy có $C_{15}^3 \cdot C_{25}^2 + C_{15}^2 \cdot C_{25}^3 + C_{15}^1 \cdot C_{25}^4 + C_{15}^0 \cdot C_{25}^5$ cách chọn.

b. Có $C_{15}^2 \cdot C_{25}^3$ cách chọn đoàn có 2 nữ và 3 nam.

c. Số cách chọn 5 học sinh trong 40 học sinh là C_{40}^5 . Trong đó có C_{15}^5 cách chọn đoàn gồm toàn nữ \Rightarrow có $C_{40}^5 - C_{15}^5$ cách chọn đoàn có ít nhất một học sinh nam.

d. Số cách chọn 5 học sinh trong 40 học sinh là C_{40}^5 . Trong đó có C_{38}^3 cách chọn đoàn mà A và B ở cùng một đoàn \Rightarrow có $C_{40}^5 - C_{38}^3$ cách chọn đoàn mà anh A và chị B không thể cùng tham gia một đoàn đại biểu.

e. Có C_{38}^3 cách chọn đoàn mà X và Y ở cùng một đoàn. Có C_{38}^5 cách chọn đoàn mà X và Y cùng vắng mặt \Rightarrow có $C_{38}^3 + C_{38}^5$ cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

Từ 1 nhóm học sinh gồm 7 nam và 6 nữ, thầy giáo cần chọn ra 5 em tham dự lễ mít tinh tại trường với yêu cầu có cả nam lẫn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

LỜI GIẢI

TH1: 1 nam + 4 nữ :ta có $C_7^1 C_6^4$ cách.

TH2: 2 nam + 3 nữ :ta có $C_7^2 C_6^3$ cách.

TH3: 3 nam + 2 nữ:ta có $C_7^3 C_6^2$ cách.

TH4: 4 nam + 1 nữ:ta có $C_7^4 C_6^1$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng ta có:

$$C_7^1 C_6^4 + C_7^2 C_6^3 + C_7^3 C_6^2 + C_7^4 C_6^1 = 1260 \text{ cách.}$$

Cách 2: Bước 1: Chọn 5 em bất kỳ trong 15 em, có C_{13}^5 cách.

Bước 2: Chọn 5 em đều là nam, có C_7^5 cách.

Bước 3: Chọn 5 em đều là nữ, có C_6^5 cách.

$$\text{Chọn 5 em có cả nam và nữ: } C_{13}^5 - (C_7^5 + C_6^5) = 1260$$

Một nhóm học sinh có 10 em nam và 13 em nữ. Người ta cần chọn ra 8 em trong nhóm tham gia đồng diễn thể dục. Trong 8 em được chọn, yêu cầu không có quá 6 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

LỜI GIẢI

Trường hợp 1: Chọn 8 em đều nam, có C_{10}^8 cách.

Trường hợp 2: Chọn 7 em nam và một em nữ, có $C_{10}^7 \cdot C_{13}^1$ cách.

Trường hợp 3: Chọn 6 em nam và 2 em nữ, có $C_{10}^6 \cdot C_{13}^2$ cách.

Trường hợp 4: Chọn 5 em nam và 3 em nữ, có $C_{10}^5 \cdot C_{13}^3$ cách.

Trường hợp 5: Chọn 4 em nam và 4 em nữ, có $C_{10}^4 \cdot C_{13}^4$ cách.

Trường hợp 6: Chọn 3 em nam và 5 em nữ, có $C_{10}^3 \cdot C_{13}^5$ cách.

Trường hợp 7: Chọn 2 em nam và 6 em nữ, có $C_{10}^2 \cdot C_{13}^6$ cách.

Theo quy tắc cộng có:

$$C_{10}^8 + C_{10}^7 \cdot C_{13}^1 + C_{10}^6 \cdot C_{13}^2 + C_{10}^5 \cdot C_{13}^3 + C_{10}^4 \cdot C_{13}^4 + C_{10}^3 \cdot C_{13}^5 + C_{10}^2 \cdot C_{13}^6 = 471867$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp gián tiếp:

Chọn 8 em trong 23 em bất kỳ, có C_{23}^8 cách.

Chọn 7 em nữ và 1 em nam, có $C_{13}^7 \cdot C_{10}^1$ cách.

Chọn 8 em đều nữ, có C_{13}^8 cách.

$$\text{Vậy có: } C_{23}^8 - (C_{13}^7 \cdot C_{10}^1 + C_{13}^8) = 471867 \text{ cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.}$$

Nhận xét: sử dụng phương pháp gián tiếp giải đơn giản hơn phương pháp trực tiếp rất nhiều.

Một lớp học có 10 học sinh nam và 15 học sinh nữ.

a) Có bao nhiêu cách chọn từ đó ra một đội gồm 12 người.

b) Chọn từ đó ra một đội văn nghệ gồm 13 người sao cho có ít nhất là 10 nữ và phải có cả nam và nữ.

LỜI GIẢI

a). Chọn 12 người trong 25 người, có C_{25}^{12} cách chọn.

b). Có các trường hợp sau xảy ra theo yêu cầu:

Trường hợp 1: Chọn 10 nữ và 3 nam, có $C_{15}^{10} \cdot C_{10}^3$ cách.

Trường hợp 2: Chọn 11 nữ và 2 nam, có $C_{15}^{11} \cdot C_{10}^2$ cách.

Trường hợp 3: Chọn 12 nữ và 1 nam, có $C_{15}^{12} \cdot C_{10}^1$ cách.

Theo quy tắc cộng có: $C_{15}^{10} \cdot C_{10}^3 + C_{15}^{11} \cdot C_{10}^2 + C_{15}^{12} \cdot C_{10}^1 = 426335$ cách.

Một lớp có 8 học sinh nam và 12 học sinh nữ.

a). Chọn từ đó ra 6 học sinh sao cho có đủ nam và nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

b). Chọn từ đó ra 10 học sinh sao cho có ít nhất 2 học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

LỜI GIẢI

a). Chọn 6 học sinh trong 20 học sinh bất kỳ, có C_{20}^6 cách.

Chọn 6 học sinh đều nam, có C_8^6 cách.

Chọn 6 học sinh đều nữ, có C_{12}^6 cách.

Vậy có $C_{20}^6 - (C_8^6 + C_{12}^6) = 37808$ cách.

b). Chọn 10 học sinh bất kỳ trong 20 học sinh, có C_{20}^{10} cách.

Chọn 10 học sinh đều là nữ, có C_{12}^{10} cách.

Chọn 10 học sinh trong đó có 9 nữ và 1 nam, có $C_{12}^9 \cdot C_8^1$ cách.

Vậy có $C_{20}^{10} - (C_{12}^{10} + C_{12}^9 \cdot C_8^1) = 182930$ cách.

Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.

LỜI GIẢI

(Nhận xét vì 3 tỉnh không có tên nên không hoán vị)

Bước 1: Chọn 4 nam và 1 nữ cho tỉnh thứ nhất, có $C_{12}^4 \cdot C_3^1$ cách

Bước 2: Chọn 4 nam trong 8 nam còn lại và 1 nữ trong 2 nữ còn cho tỉnh thứ hai, có $C_8^4 \cdot C_2^1$ cách.

Bước 3: 4 nam còn lại và 1 nữ còn lại về giúp cho tỉnh thứ 3, có 1 cách

Số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $C_{12}^4 \cdot C_3^1 \cdot C_8^4 \cdot C_2^1 \cdot 1 = 207900$ cách.

(ĐH khối B 2004) Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau và nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.

LỜI GIẢI

Mỗi đề kiểm tra có số câu dễ là 2 hoặc 3, nên có các trường hợp sau:

* Đề có 2 câu dễ, 2 câu trung bình, 1 câu khó \Rightarrow có $C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1$ đề.

* Đề có 2 câu dễ, 1 câu trung bình, 2 câu khó \Rightarrow có $C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2$ đề.

* Đề có 3 câu dễ, 1 câu trung bình, 1 câu khó \Rightarrow có $C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1$ đề.

Vậy tất cả có:

$C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1 + C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2 + C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1 = 23625 + 10500 + 22750 = 56875$ đề.