Vấn đề 2. CÁC BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH XUNG QUANH, THỂ TÍCH VÀ THIẾT DIỆN CỦA KHỐI NÓN, KHỐI TRỤ.

Phương pháp:

1) Khối nón:

- Phải xác định được bán kính, đường cao hoặc đường sinh, hoặc góc ở đỉnh của hình nón.
- Thiết diện qua đỉnh hình nón là một tam giác cân.
- Thiết diện vuông góc với trục hình nón là một hình tròn.

2) Khối trụ

- Phải xác định được chiều cao h và bán kính R của hình trụ .
- Nếu thiết diện của hình trụ song song hoặc chứa trục của hình trụ thì thiết diện đó là hình chữ nhật.
- Nếu thiết diện của hình trụ vuông góc với trục hình trụ thì thiết diện đó là hình tròn.

Ví dụ 1.2.5 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đường cao $SO = h, SAB = 45^0$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

Lời giải.

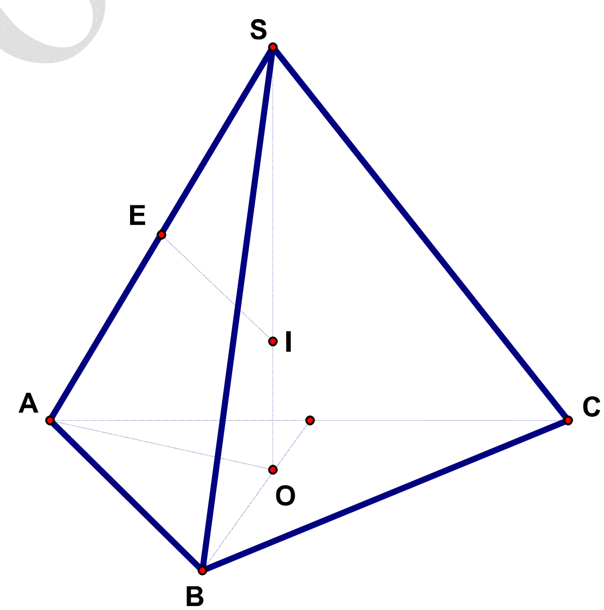
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì ta có $SO \perp (ABC)$.

Trong mặt phẳng (SOA) dựng đường trung trực (d) của SA cắt SO tại I thì I là tâm mặt cầu $(ABCD)$.

Thật vậy: $I \in SO$ là trục của tam giác $ABC \Rightarrow SA = SB = SC$.

$I \in (d) \Rightarrow IA = IS$

$\Rightarrow IA = IB = IC = IS$



Hai tam giác vuông SOA và SEI đồng dạng (E là trung điểm của AB). Suy ra

$$\frac{SO}{SE} = \frac{SA}{SI} \Rightarrow R = SI = \frac{SA.SE}{SO} = \frac{1}{2}\frac{SA^2}{SO}.$$

Tam giác cân SAB có $SAB = 45^0 \Rightarrow$ Tam giác này vuông cân tại S.

Đặt $SA = x$, khi đó $AB = x\sqrt{2}$, $OA = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{x\sqrt{6}}{3}$.

Trong tam giác vuông SOA : $SA^2 - OA^2 = SO^2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{6x^2}{9} = h^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 3h^2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}\frac{3h^2}{h} = \frac{3h}{2}$.

Ví dụ 2.2.5 Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và DBC chứa trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Biết $BC = a, BAC = 60^0$, $BDC = 30^0$. Tính bán kính và thể tích của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Lời giải.

Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ABC và E là trung điểm của BC, ta có

$O_1E \perp BC \Rightarrow O_1E \perp (ABC)\left(do\,(ABC) \perp (BCD)\right)$

$O_2E \perp BC \Rightarrow O_2E \perp (BCD)$

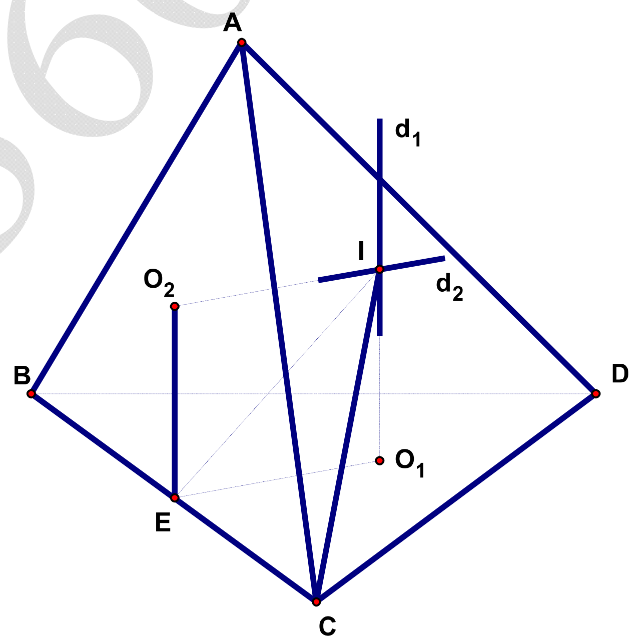
Qua O_1 dựng đường thẳng d_1 vuông góc với (BCD) thì d_1 là trục của tam giác (BCD) và $d_1 // O_2E$.

Qua O_2 dựng đường thẳng d_2 vuông góc với (ABC) thì d_2 là trục của tam giác ABC và $d_2 // O_1E$.

Tâm I của mặt cầu là giao điểm của d_1, d_2. Thật vậy :

$I \in d_1 \Rightarrow IB = IC = ID$

$I \in d_2 \Rightarrow IA = IB = IC$



$\Rightarrow IA = IB = IC = ID \Rightarrow$ I là tâm mặt cầu $ABCD$.

Tứ giác EO_1IO_2 là hình chữ nhật, suy ra: $IE^2 = O_1E^2 + O_2E^2$.

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính các đường tròn (BCD) và (ABC), ta có

$$O_1E^2 = O_1C^2 - EC^2 = R_1^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = R_1^2 - \frac{BC^2}{4} \quad , O_2E^2 = O_2C^2 - EC^2 = R_2^2 - \frac{BC^2}{4}$$

Suy ra : $IE^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{BC^2}{2} \Rightarrow R^2 = IE^2 + EC^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{BC^2}{4}$.

Áp dụng định lí hàm số sin trong các tam giác BDC, BAC, ta có

$$\frac{BC}{\sin BDC} = 2R_1 \Rightarrow \frac{a}{2\sin 30^0} = R_1 \Rightarrow R_1 = a.$$

$$\frac{BC}{\sin BAC} = 2R_2 \Rightarrow \frac{a}{2\sin 60^0} = R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $R^2 = a^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{12} \Rightarrow R = a\sqrt{\frac{13}{12}} = \frac{a\sqrt{39}}{6}$.

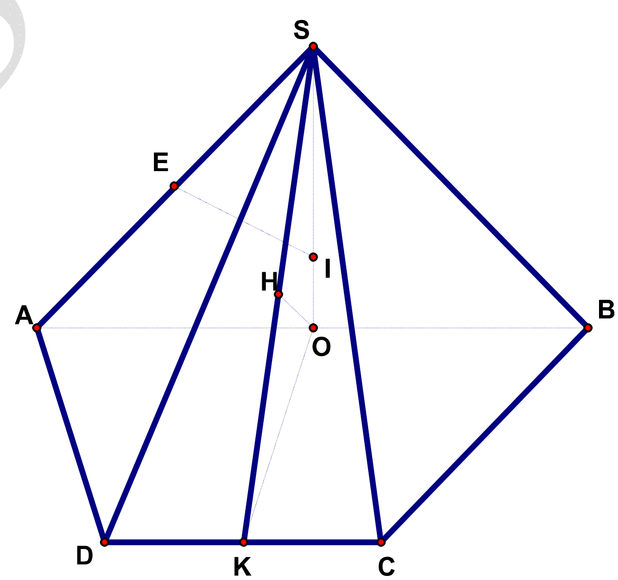
Thể tích của khối cầu $(ABCD)$: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{39}}{6}\right)^3$.

Ví dụ 3.2.5 Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = SB = SC = SD$, đáy $ABCD$ là hình thang có $AB // CD, AB = 2a, BC = CD = DA = a$, khoảng cách giữa AB và SC bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

Lời giải.

Hình thang $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AB chứa trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi O là trung điểm của AB, vì $SA = SB = SC = SD$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Trong mặt phẳng (SAB), đường trung trực của SA cắt SO tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp



$S.ABCD$. Hai tam giác vuông SOA và SEI đồng dạng (E là trung điểm của AB).

Suy ra $\dfrac{SO}{SE}=\dfrac{SA}{SI}\Rightarrow R=SI=\dfrac{SA.SE}{SO}=\dfrac{1}{2}\dfrac{SA^2}{SO}$.

$CD\,//\,AB\Rightarrow (SCD)\,//\,AB\Rightarrow d(AB,SC)=d(AB,(SCD))=d(O,(SCD))$.

Gọi K là trung điểm của CD, H là hình chiếu vuông góc của O lên SK, ta có

$$\begin{cases} CD\perp OK \\ CD\perp SO \end{cases}\Rightarrow CD\perp (SOK)\Rightarrow CD\perp OH.$$

$$\begin{cases} OH\perp CD \\ OH\perp SK \end{cases}\Rightarrow OH\perp (SCD)\Rightarrow OH=d(AB,SC)=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Trong tam giác vuông SOK,

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OK^2}\Rightarrow \frac{1}{SO^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{3a^2}$$

$$\Rightarrow SO=\frac{a\sqrt{6}}{2},\ SA^2=SO^2+OA^2=\frac{3a^2}{2}+a^2=\frac{5a^2}{2}\Rightarrow R=\frac{1}{2}.\frac{\frac{5a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}}=\frac{5a}{2\sqrt{6}}.$$

Ví dụ 4.2.5 Cho hình chóp $SABC$ có SA,SB,SC vuông góc với nhau từng đôi một . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$

1. Nêu cách dựng tâm I và chứng minh ba điểm S,G,I thẳng hàng.Tính tỉ số $\dfrac{GI}{GS}$

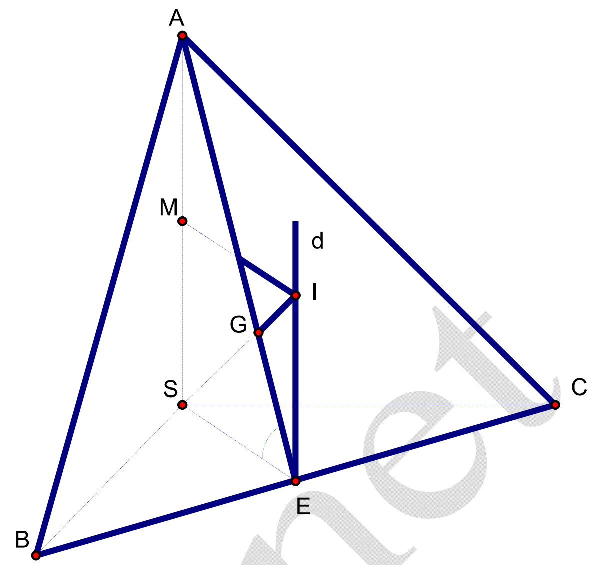
2. Cho $SB=SC$ góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là 60^0, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$ bằng $\dfrac{3}{2}a$. Tính V của khối chóp $S.ABC$

Lời giải.

1. Nêu cách dựng tâm I và chứng minh ba điểm S,G,I thẳng hàng.Tính $\dfrac{GI}{GS}$.

Vì tam giác SBC vuông tại S, gọi E là trung điểm của BC thì E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. Dựng đường thẳng d vuông góc (SBC) tại E thì d là trục của tam giác SBC và d song song với SA (do $SA \perp (SBC)$).

Trong mặt phẳng (d,SA), từ trung điểm M của đoạn SA dựng đường thẳng vuông góc với SA và cắt d tại I thì MI là đường trung trực của đoạn



SA và I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.
Thật vậy :
* $I \in d \Rightarrow IS = IB = IC$.
* $I \in$ đường trung trực của $SA \Rightarrow IA = IS$.
Do đó $IA = IB = IC = IS$, suy ra đpcm.
Trong mặt phẳng (SA,d), đoạn AE cắt đoạn SI tại G'. Áp dụng định lí Ta-let ,ta có: $\frac{IE}{SA} = \frac{G'E}{G'A} = \frac{G'I}{G'S}$ (1)

Dễ thấy tứ giác $SEIM$ là hình chữ nhật , do đó $IE = MS = \frac{1}{2}SA$ .Thay vào (1) ta được $\frac{G'E}{G'A} = \frac{G'I}{G'S} = \frac{1}{2}$

AE là trung tuyến của tam giác ABC, G' thuộc đoạn AE và $\frac{G'E}{G'A} = \frac{1}{2}$ nên G' là trọng tâm của tam giác ABC, tức là $G' \equiv G$. Vậy ba điểm S,G,I thẳng hàng và cũng từ (1) ,ta có $\frac{GI}{GS} = \frac{1}{2}$.

2. Tính V của khối chóp $S.ABC$.
$SB = SC \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại S $\Rightarrow BC \perp SE$, lại có $BC \perp SA$
$\Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow ((SBC),(SAE)) = (AE,SE) = SEA = 60^0$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ là IS, theo giả thiết, ta có : $IS = \frac{3}{2}a$.

Theo kết quả câu 1) , $\frac{GI}{GS} = \frac{1}{2} \Rightarrow SG = \frac{2}{3}SI = a$,

Đặt $SE = x(x > 0)$. Tam giác vuông ASE (vuông tại S) có $SEA = 60^0$ nên là nửa tam giác đều, suy ra $AS = x\sqrt{3}$, $AE = 2x$

G là trọng tâm của tam giác ABC nên $EG = \frac{1}{3}AE = \frac{2x}{3}$.

Áp dụng định lí hàm cosin trong tam giác SEG, ta có:

$$SG^2 = SE^2 + EG^2 - 2SE.EG.\cos SEA \Rightarrow a^2 = x^2 + \frac{4x^2}{9} - 2x.\frac{2x}{3}\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{7x^2}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{9a^2}{7} \Rightarrow x = \frac{3a}{\sqrt{7}} \Rightarrow SB = SE\sqrt{2} = x\sqrt{2}$$

Thể tích của khối chóp $S.ABC$:

$$V = \frac{1}{3}S_{SBC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}SB^2.x\sqrt{3} = \frac{1}{6}x^3\sqrt{3} = \frac{1}{6}\left(\frac{3a}{\sqrt{7}}\right)^3\sqrt{3} = \frac{9a^3\sqrt{3}}{14\sqrt{7}}.$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1

1. Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a .

a) Tính diện tích toàn phần và thể tích hình nón.

b) Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60^0. Tính diện tích thiết diện này.

2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác vuông tại A , $ABC = 60^0$. Biết rằng có một hình nón nội tiếp hình chóp đã cho với bán kính đáy là r , góc giữa đường sinh và đáy hình nón là β .

a) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón .

b) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình chóp.

3. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $SAO = 30^0, SAB = 60^0$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón.

Bài 2 Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh $2R$.

1. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của khối trụ.

2. Tính thể tích khối trụ.

3. Tính thể tích khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ.

Bài 3

1. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn tâm O lấy điểm A. Trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể tích của khối tứ diện $OO'AB$.

Bài 4 Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng R, góc ở đỉnh là 2α với $45^0 < \alpha < 90^0$.

1. Tính diện tích xung quanh và thể tích khối nón.

2. Tìm diện tích thiết diện do mặt phẳng (P) cắt hình nón theo hai đường sinh vuông góc với nhau.

3. Xét hai điểm M, N thay đổi trên đáy sao cho góc giữa mặt phẳng (SMN) và mặt đáy hình nón bằng β. Chứng minh rằng đường thẳng SI với I là trung điểm MN luôn thuộc một mặt nón cố định.

Bài 5

Cho hình nón (N) có đỉnh S và đường tròn đáy tâm O. Tồn tại một hình chóp $M.ABC$ có tam giác ABC với $AB = AC, BAC = 30^0$ nội tiếp trong đường tròn (O), điểm M thuộc đường sinh và hình chiếu H của M trên mặt đáy là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính tỉ số thể tích khối chóp và thể tích khối nón.

Bài 6 Một hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O, O' có bán kính r và có đường cao $h = \sqrt{2}r$. Gọi A là một điểm trên đường tròn tâm O và B là một điểm trên đường tròn tâm O' sao cho $OA \perp O'B$.

1. Chứng minh rằng các mặt bên của tứ diện $OABO'$ là những tam giác vuông. Tính diện tích tứ diện này.

2. Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và song song với trục OO'. Tính khoảng cách giữa trục OO' và mặt phẳng (α).

3. Chứng minh rằng mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt trụ trục OO' có bán kính bằng $\frac{\sqrt{2}r}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 7

Bên trong hình trụ có một hình vuông $ABCD$ cạnh a nội tiếp mà hai đỉnh A, B nằm trên đường trong đáy thứ nhất, hai đỉnh C, D nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng chứa hình vuông tạo với đáy một góc

45^0. Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối trụ.

Bài 8 Cho hai điểm cố định A, B có $AB = a$. Với mỗi điểm C trong không gian sao cho tam giác ABC đều, kí hiệu AD là đường cao của tam giác ABC. Trong mặt phẳng chứa d và AD, xét đường tròn đường kính AD. Gọi S là một giao điểm của đường tròn này với đường thẳng d.

1. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

2. Chứng minh rằng khi điểm C thay đổi thì điểm S thuộc một đường tròn cố định và mỗi đường thẳng SA, SB thuộc một mặt nón cố định.

Bài 9 Một hình nón có hai đáy là $(O; R)$, $(O'; R)$ và có thiết diện qua trục là một hình vuông.

1. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ,

2. Tính thể tích khối trụ tương ứng,

3. Tính thể tích khối lăng trụ đứng tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp khối trụ (trong đó các hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$ nội tiếp (O) và (O')),

4. Lấy M là một điểm bất kì trên đường tròn $(O'; R)$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MAC khi M thay đổi trên $(O'; R)$,

5. Gọi N là điểm đối xứng với M qua O'. Xác định vị trí MN sao cho thể tích của tứ diện $ACMN$ đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó.

Bài 10 Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O; R)$ và $(O'; R)$, chiều cao của hình trụ là h, AB là một đường kính cố định trên đường tròn (O) và M là một điểm thay đổi trên đường tròn (O').

1. Tìm vị trí của điểm M để diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

2. Tính thể tích khối lăng trụ $n_$giác đều nội tiếp, ngoại tiếp hình trụ.

Bi 11 Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O; R)$ và $(O'; R)$, chiều cao của hình trụ là h. AB là một đường kính cố định trên đường tròn (O) và M là một điểm thay đổi trên đường tròn (O').

1. Tìm vị trí của điểm M để diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

2. Gọi N là điểm đối xứng với M qua O'. Tìm vị trí của MN sao cho thể tích tứ diện $ABMN$ đạt giá trị lớn nhất.

3. Tính thể tích khối lăng trụ $n-$giác đều nội tiếp, ngoại tiếp hình trụ.