

**Vấn đề 2. PHÂN CHIA – LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN
CHỨNG MINH HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU, CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐA
DIỆN ĐỀU**

Phương pháp:

Để chứng minh hai đa diện bằng nhau, ta chứng minh có một phép biến hình trong không gian biến đa diện này thành đa diện kia.

Ví dụ 1.2.1 Cho khối tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh rằng:

1. Trọng tâm các mặt của khối đó là các đỉnh của một tứ diện đều.
2. Các trung điểm các cạnh của khối đó là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

Lời giải.

1. Gọi Q, M lần lượt là trung điểm của CD, CB ; G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các mặt $(ABC), (ACD), (ABD)$ và (BCD) .

Gọi a là cạnh của tứ diện, ta có

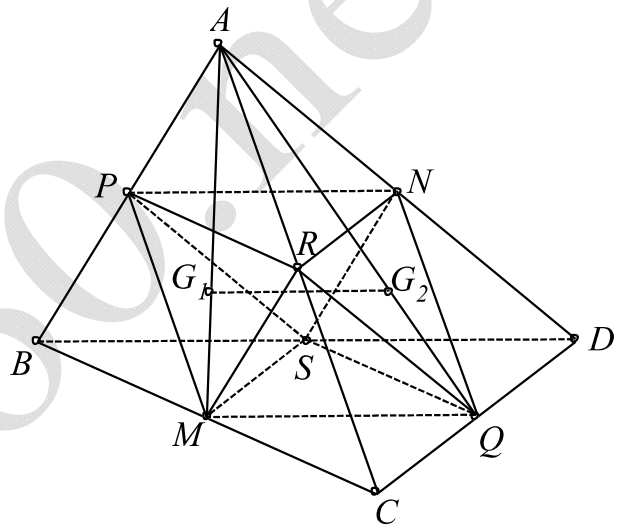
$$G_1G_2 = \frac{2}{3}MQ = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Tương tự } G_1G_4 &= G_1G_3 = G_2G_3 \\ &= G_2G_4 = G_3G_4 = \frac{a}{3} \text{ nên } G_1G_2G_3G_4 \end{aligned}$$

là một tứ diện đều cạnh $\frac{a}{3}$.

2. Gọi N, P, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AD, AB, AC, BD
Theo tính chất đường trung bình, ta có:

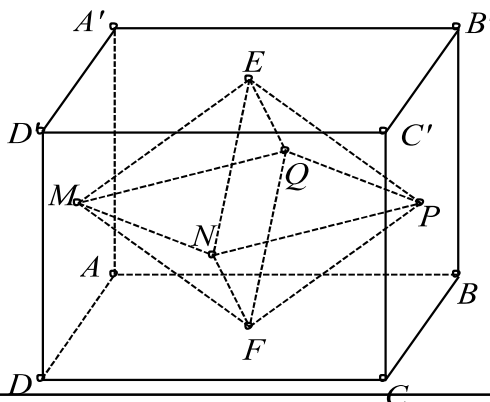
$$QM = QN = QS = QR = PM = PN = PS = PR = \frac{a}{2}$$



Ví dụ 2.2.1 Chứng minh rằng tâm các mặt của hình lập phương là các đỉnh của một bát diện đều.

Lời giải.

Giả sử cạnh của hình lập phương đã cho là a . Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là tâm các mặt của hình lập phương (hình vẽ).



Ta có $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ và tương tự

cho các cạnh khác của hình gồm tám đỉnh M, N, P, Q, E, F .

Hay $MNPQEF$ là một bát diện đều.

Ví dụ 3.2.1 Cho khối bát diện đều $ABCDEF$ cạnh a , trong đó E, F là hai đỉnh không cùng nằm trên một cạnh. Gọi $A', B', C', D', A'', B'', C'', D''$ lần lượt là trung điểm các cạnh $EA, EB, EC, ED, FA, FB, FC, FD$. Chứng minh rằng $A'B'C'D'.A''B''C''D''$ là một hình hộp chữ nhật và tính các cạnh của hình chữ nhật đó.

Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a , nên các tứ giác $A'B'C'D', A''B''C''D''$ là các hình vuông cạnh $\frac{a}{2}$ và hai mặt phẳng $(A'B'C'D')$ và $(A''B''C''D'')$ song song với nhau

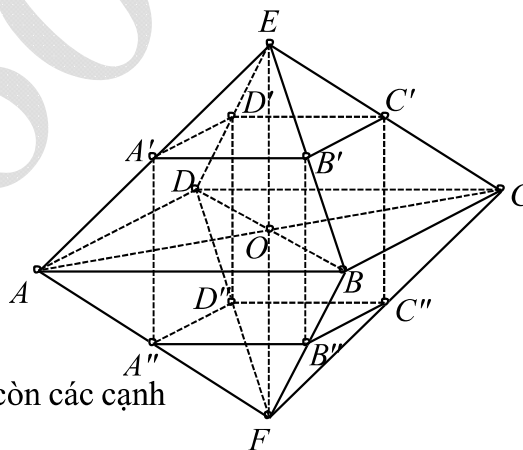
Ta có $A'A'' // EF$ nên

$A'A'' \perp (ABCD) \Rightarrow A'A'' \perp (A'B'C'D')$.

Tương tự suy ra các cạnh bên $A'A'', B'B'', C'C'', D'D''$ cùng vuông góc với hai mặt đáy. Vậy $A'B'C'D'.A''B''C''D''$ là hình hộp chữ nhật.

Các cạnh đáy của hình hộp có độ dài là $\frac{a}{2}$, còn các cạnh

bên của hình hộp có độ dài là $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.



CÁC BÀI TÓAN LUYỆN TẬP

Bài 1

- Hãy phân chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành ba khối tứ diện.
- Chia một khối hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành 5 khối tứ diện.
- Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng ta có thể nội tiếp khối tứ diện trong một khối hộp sao cho các cạnh của tứ diện là đường chéo các mặt của khối hộp.
- Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh hai tứ diện $A'ABD$ và $CC'D'B'$ bằng nhau.

5. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB . Chứng minh hai tứ diện $SABA'$ và $SBCB'$

Bài 2 Cho khối bát diện đều $ABCDEF$ cạnh a , trong đó E, F là hai đỉnh không cùng nằm trên một cạnh. Gọi $A', B', C', D', A'', B'', C'', D''$ lần lượt là trung điểm các cạnh $EA, EB, EC, ED, FA, FB, FC, FD$. Chứng minh rằng

$A'B'C'D'.A''B''C''D''$ là một hình hộp chữ nhật và tính các cạnh của hình chữ nhật đó

Bài 3

1. Hãy phân chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành

a) Ba khối tứ diện.

b) Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác

2. Hãy phân chia một khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ thành năm khối tứ diện

3. Cho hình chóp tứ giác $F.ABCD$ có đáy là hình vuông. Cạnh bên FC vuông góc với đáy và có độ dài bằng cạnh AB . Chứng minh rằng có thể dùng ba hình chóp như trên để ghép lại thành một hình lập phương.

4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng

a) Các hình chóp $A.A'B'C'D'$ và $C'.ABCD$ bằng nhau.

b) Các lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và $AA'D'.BB'C'$ bằng nhau.

5. Hãy dùng 4 mặt phẳng để chia một khối tứ diện cho trước thành 9 khối tứ diện.

Bài 4

1. Cho khối bát diện đều $ABCDEF$ cạnh a , trong đó E, F là hai đỉnh không cùng nằm trên một cạnh. Gọi $A', B', B', D', A'', B'', C'', D''$ lần lượt là trung điểm các cạnh $EA, EB, EC, ED, FA, FB, FC, FD$. Chứng minh rằng:

$A'B'C'D'.A''B''C''D''$ là một hình hộp chữ nhật và tính các cạnh của hình chữ nhật đó.

2. Cho khối tứ diện đều. Chứng minh rằng:

a) Trọng tâm các mặt của nó là các đỉnh của một tứ diện đều

b) Các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

3. Cho khối bát diện đều $ABCDEF$. Chứng minh rằng:

a) Các điểm A, B, C, D nằm trên mặt phẳng trung trực của EF

b) $(ABCD) \perp (ECFA)$.

4. Chứng minh tâm các mặt của một hình bát diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.

5. Chứng minh rằng tâm các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của một hình bát diện đều.

6. Chứng minh rằng tồn tại một khối đa diện có 20 mặt là tam giác đều nhưng không phải là khối hai mươi mặt đều.

Bài 5

1. Cho khối tứ diện đều ABCD. Chứng minh rằng

a) Trọng tâm các mặt của khối đó là các mặt của một tứ diện đều.

b) Các trung điểm các cạnh của khối đó là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

2. Chứng minh rằng tâm các mặt của một hình bát diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.