

Câu 9. Cho hai điểm $A(1; -1; 1); B(2; -2; 4)$. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa A, B và tạo với mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + z - 7 = 0$ một góc 60° .

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. Vô số.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$\overrightarrow{AB}(1; -1; 3), \overrightarrow{n_\alpha}(1; -2; 1)$$

Gọi $\overrightarrow{n_\beta}(a; b; c)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (β) cần lập.

$$\begin{aligned} \cos((\alpha), (\beta)) &= \left| \cos(\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}) \right| = \frac{|\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{n_\beta}|} \\ &= \frac{|1 \cdot a - 2 \cdot b + 1 \cdot c|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2(a - 2b + c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) \quad (1)$$

Mặt khác vì mặt phẳng (β) chứa A, B nên:

$$\overrightarrow{n_\beta} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow a - b + 3c = 0 \Leftrightarrow a = b - 3c$$

$$\text{Thế vào (1) ta được: } 2b^2 - 13bc + 11c^2 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt. Suy ra có 2 vector $\overrightarrow{n_\beta}(a; b; c)$ thỏa mãn.

Suy ra có 2 mặt phẳng.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dựng hình

Câu 10. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB, CD . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**:

A. $\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|}$

B. $\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|}$

$$C. \cos\alpha = \frac{|\overline{AB,CD}|}{|\overline{AB},\overline{CD}|}$$

$$D. \cos\alpha = \frac{|\overline{AB,CD}|}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{CD}|}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức ở lý thuyết.

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $BB', CD, A'D'$. Góc giữa hai đường thẳng MP và $C'N$ là:

- A. 90° B. 120° C. 60° D. 30°

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A \equiv O(0; 0; 0)$

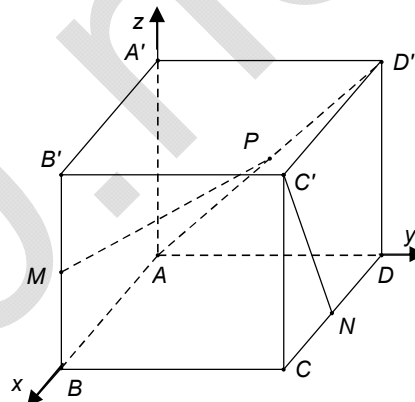
Suy ra $B(a; 0; 0); C(a; a; 0); D(0; a; 0)$

$A'(0; 0; a); B'(a; 0; a); C'(a; a; a); D'(0; a; a)$

$M\left(a; 0; \frac{a}{2}\right); N\left(\frac{a}{2}; a; 0\right); P\left(0; \frac{a}{2}; a\right)$

Suy ra $\overline{MP} = \left(-a; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right); \overline{NC'} = \left(\frac{a}{2}; 0; a\right) \Rightarrow \overline{MP} \cdot \overline{NC'} = 0$

$\Rightarrow (MP, NC') = 90^\circ$



Câu 12. Cho hình chóp $A.BCD$ có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc. $\triangle ABC$ cân, cạnh bên bằng $a, AD = 2a$. Cosin góc giữa hai đường thẳng BD và DC là:

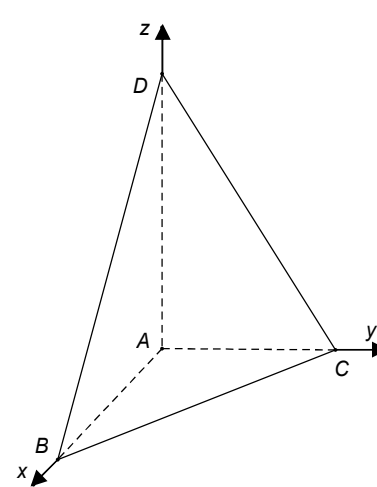
- A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{2}{\sqrt{5}}$
 C. $\frac{4}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A \equiv O(0; 0; 0)$

Suy ra $B(a; 0; 0); C(0; a; 0); D(0; 0; 2a)$



Ta có $\overrightarrow{DB}(a; 0; -2a); \overrightarrow{DC}(0; a; -2a)$

$$\cos(DB, DC) = \left| \cos(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC}) \right| = \frac{|\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{DB}| \cdot |\overrightarrow{DC}|} = \frac{4}{5}.$$

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2$, $AC = \sqrt{5}$. $\triangle SAC$ vuông cân tại A . K là trung điểm của cạnh SD . Hãy xác định cosin góc giữa đường thẳng CK và AB ?

A. $\frac{4}{\sqrt{22}}$

B. $\frac{2}{\sqrt{11}}$

C. $\frac{4}{\sqrt{17}}$

D. $\frac{2}{\sqrt{22}}$

Hướng dẫn giải

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 1$

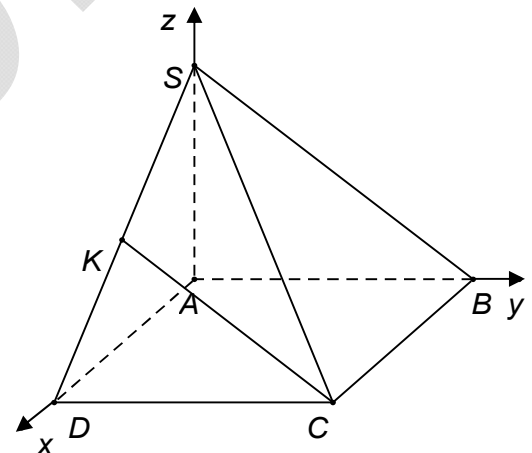
Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A \equiv O(0; 0; 0)$

Suy ra $B(0; 2; 0); C(1; 2; 0); D(1; 0; 0)$

$$S(0; 0; \sqrt{5}); K\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{CK}\left(-\frac{1}{2}; -2; \frac{\sqrt{5}}{2}\right); \overrightarrow{AB}(0; 2; 0)$$

$$\cos(CK, AB) = \left| \cos(\overrightarrow{CK}; \overrightarrow{AB}) \right| = \frac{|\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CK}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{4}{\sqrt{22}}.$$



Câu 14. Qua bốn điểm $A(-3; -4; 5); B(2; 7; 7); C(3; 5; 8); D(-2; 6; 1)$. Đường thẳng nào tạo với nhau một góc 60° .

A. AB và CB .

B. AC và CD .

C. DB và AC .

D. CB và CA .

Hướng dẫn giải

Từ bốn điểm A, B, C, D tạo ra 6 vector chỉ phương khác nhau. Tính tọa độ các vector sau đó thay vào công thức: $\cos(d, d') = \left| \cos(\overrightarrow{u}_d; \overrightarrow{u}_{d'}) \right|$ để kiểm tra.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây đi qua $A(2; 1; -1)$ tạo với trục Oz một góc 30° .

- A. $\sqrt{2}(x-2) + (y-1) - (z-2) - 3 = 0$. B. $(x-2) + \sqrt{2}(y-1) - (z+1) - 2 = 0$.
C. $2(x-2) + (y-1) - (z-2) = 0$. D. $2(x-2) + (y-1) - (z-1) - 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

Gọi phương trình mặt phẳng (α) cần lập có dạng $A(x-2) + B(y-1) + C(z+1) = 0$; $\vec{n}(A; B; C)$

Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{k}(0; 0; 1)$.

$$\text{Áp dụng công thức } \sin((\alpha), Oz) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \sin 30^\circ$$

Sau khi tìm được các vectơ pháp tuyến thỏa mãn, thay giá trị của A vào để viết phương trình mặt phẳng.

Câu 16. Cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 5z + 8 = 0$. Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 1 = 0$; $(\beta): x - 2z - 3 = 0$. Góc giữa d và (P) là:

- A. 60° B. 120° C. 150° D. 30°

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{n}_P(3; 4; 5)$

$$\vec{n}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (2; 1; 1)$$

$$\text{Áp dụng công thức } \sin((P), d) = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{u}_d|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{u}_d|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Câu 17. Gọi α là góc giữa hai vectơ \vec{AB}, \vec{CD} . Khẳng định nào sau đây là đúng:

- A. $\cos \alpha = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{DC}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{DC}|}$ B. $\cos \alpha = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CD}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}|}$
C. $\sin \alpha = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CD}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}|}$ D. $\cos \alpha = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CD}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}|}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức ở lý thuyết.

Câu 18. Cho ba mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 3 = 0$; $(Q): x - y - z - 2 = 1$; $(R): x + 2y + 2z - 2 = 0$. Gọi $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ lần lượt là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) , (Q) và (R) , (R) và (P) . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng.

- A. $\alpha_1 > \alpha_3 > \alpha_2$ B. $\alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_1$ C. $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$ D. $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tính góc giữa hai mặt phẳng. Sử dụng máy tính bỏ túi để tính góc rồi so sánh các giá trị đó với nhau.

VẬN DỤNG

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z + m = 0$ và điểm $A(1;1;1)$. Khi đó m nhận giá trị nào sau đây để khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) bằng 1:

- A. -2 hoặc -8 B. -8
C. -2 D. 3

Hướng dẫn giải: $d(A;(\alpha)) = \frac{|5+m|}{3} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m+5=3 \\ m+5=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=-8 \end{cases}$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm $A(-2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;4)$. Khi đó khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) là:

- A. $\frac{12\sqrt{61}}{61}$ B. 4
C. $\frac{\sqrt{61}}{12}$ D. 3

Hướng dẫn giải

Cách 1: $(\alpha): \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 6x - 4y - 3z + 12 = 0$; $d(O;(ABC)) = \frac{12\sqrt{61}}{61}$

Cách 2: Tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc, khi đó

$$\frac{1}{d^2(O, (ABC))} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{61}{144} \Rightarrow d(O, (ABC)) = \frac{12\sqrt{61}}{61}$$

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;0;0)$ và $N(0;0;-1)$, mặt phẳng (P) qua điểm M, N và tạo với mặt phẳng $(Q): x - y - 4 = 0$ một góc bằng 45° . Phương trình mặt phẳng (P) là:

A. $\begin{cases} y = 0 \\ 2x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = 0 \\ 2x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x - y - 2z + 2 = 0 \\ 2x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x - 2z + 2 = 0 \\ 2x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Gọi vectơ pháp tuyến của mp (P) và (Q) lần lượt là $\vec{n}_P(a; b; c)$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$), \vec{n}_Q

$$(P) \text{ qua } M(1;0;0): a(x-1) + by + cz = 0 = 0$$

$$(P) \text{ qua } N(0;0;-1) \Rightarrow a + c = 0$$

$$(P) \text{ hợp với } (Q) \text{ góc } 45^\circ \Rightarrow \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2a^2+b^2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2b \end{cases} \quad \text{Với}$$

$$a = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ chọn } b = 1 \text{ phương trình } (P): y = 0 \quad \text{Với}$$

$$a = -2b \text{ chọn } b = -1 \Rightarrow a = 2 \text{ phương trình mặt phẳng } (P): 2x - y - 2z - 2 = 0 .$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2; 0; 1)$, đường thẳng d qua điểm A cắt trục Oy góc 45° . Phương trình đường thẳng d là:

A. $\begin{cases} \frac{x+2}{2} = \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{z-1}{-1} \\ \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-\sqrt{5}} = \frac{z-1}{-1} \end{cases}$

B. $\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{z+1}{-1} \\ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-\sqrt{5}} = \frac{z+1}{-1} \end{cases}$

C. $\begin{cases} \frac{x+2}{2} = \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{z-1}{-1} \\ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{z+1}{-1} \end{cases}$

D. $\begin{cases} \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-\sqrt{5}} = \frac{z-1}{-1} \\ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{z+1}{-1} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Điểm $M(0; m; 0) \in Oy$, $\vec{j}(0; 1; 0)$ là vector chỉ phương của trục Oy , $\overline{AM}(2; -m; -1)$

$$|\cos(\overline{AM}; \vec{j})| = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{5} \text{ nên có 2 đường thẳng:}$$

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{z-1}{-1}; \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-\sqrt{5}} = \frac{z-1}{-1}$$

Cách 2: $\vec{u}_1(2; \sqrt{5}; -1) \Rightarrow |\cos(\vec{u}_1; \vec{j})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\vec{u}_2(2; -\sqrt{5}; -1) \Rightarrow |\cos(\vec{u}_2; \vec{j})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(-2; 0; 1)$ nên chọn đáp án A.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x - y + z - 1 = 0$. Khi đó mặt phẳng (R) vuông góc với mặt phẳng (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (R) bằng 2, có phương trình là:

A. $\begin{cases} x - z + 2\sqrt{2} = 0 \\ x - z - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$

B. $x - z - 2\sqrt{2} = 0$

C. $x - z + 2\sqrt{2} = 0$

D. $2x - 2z - 2\sqrt{2} = 0$.

Hướng dẫn:

$$\vec{n}_P(1; 1; 1), \vec{n}_Q(1; -1; 1) \Rightarrow [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (2; 0; -2)$$

$$\text{Mặt phẳng } (R): 2x - 2z + D = 0 \Rightarrow d(O; (R)) = \frac{|D|}{\sqrt{8}} = 2 \Rightarrow \begin{cases} D = 4\sqrt{2} \\ D = -4\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình mp $(R): x - z + 2\sqrt{2} = 0; x - z - 2\sqrt{2} = 0$

Câu 6. Tập hợp các điểm trong không gian $Oxyz$ cách đều hai mặt phẳng $(P): x + y - 2z - 3 = 0$ và $(Q): x + y - 2z + 5 = 0$ là:

A. $x + y - 2z + 1 = 0$

B. $x + y - 2z + 4 = 0$

C. $x + y - 2z + 2 = 0$

D. $x + y - 2z - 4 = 0$

Hướng dẫn: $M(x; y; z)$. Ta có $d(M, (P)) = d(M, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|x + y - 2z - 3|}{\sqrt{6}} = \frac{|x + y - 2z + 5|}{\sqrt{6}}$
 $\Leftrightarrow |x + y - 2z - 3| = |x + y - 2z + 5| \Leftrightarrow x + y - 2z + 1 = 0$

Câu 7. Tìm tập hợp các điểm trong không gian $Oxyz$ cách đều hai mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 7 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 2x + y + 2z + 1 = 0$ là:

A. $\begin{cases} x + 3y + 4z + 8 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases}$

B. $x + 3y + 4z + 8 = 0$

C. $3x - y - 6 = 0$

D. $3x + 3y + 4z + 8 = 0$.

Hướng dẫn giải

Cho điểm $M(x; y; z)$, $d(M, (P)) = d(M, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|x - 2y - 2z - 7|}{3} = \frac{|2x + y + 2z + 1|}{3}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 4z + 8 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm M thuộc trục Ox cách đều hai mặt phẳng $(P): x + y - 2z - 3 = 0$ và (Oyz) . Khi tọa độ điểm M là:

A. $\left(\frac{3}{1 + \sqrt{6}}; 0; 0\right)$ và $\left(\frac{3}{1 - \sqrt{6}}; 0; 0\right)$

B. $\left(\frac{3}{1 + \sqrt{6}}; 0; 0\right)$ và $\left(\frac{3}{\sqrt{6} - 1}; 0; 0\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{6} - 1}{3}; 0; 0\right)$ và $\left(\frac{\sqrt{6} + 1}{3}; 0; 0\right)$

D. $\left(\frac{1 + \sqrt{6}}{3}; 0; 0\right)$ và $\left(\frac{1 - \sqrt{6}}{3}; 0; 0\right)$

Hướng dẫn giải: Điểm $M(m; 0; 0) \in Ox$; $d(M, (P)) = d(M, (Oyz)) \Leftrightarrow \frac{|m - 3|}{\sqrt{6}} = |m|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 = m\sqrt{6} \\ m - 3 = -m\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{1 + \sqrt{6}} \\ m = \frac{3}{1 - \sqrt{6}} \end{cases}$$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(3; -2; 4)$ và đường thẳng $d: \frac{x - 5}{2} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 2}{-2}$. Điểm

M thuộc đường thẳng d sao cho M cách A một khoảng là $\sqrt{17}$. Tọa độ điểm M là: