**Bài 10.**

Điều kiện tồn tại mặt cầu $14 - m > 0$.

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-1;\ 2;\ -3)$ và bán kính $R = \sqrt{14 - m}$.

**1**. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng là

$$d(I;\ (P)) = \frac{\left|-1 - 2.2 + 2.(-3) - 1\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 4$$

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng nên $R = 4 \Leftrightarrow m = -2$.

Vậy giá trị cần tìm của $m$ là $m = -2$.

**2**. Ta có $d(I;\ (Q)) = \dfrac{\left|-2 - 2 + 6 + 1\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 1$.

Vì đường tròn giao tuyến có diện tích là $4\pi$ nên có bán kính $r = 2$, do đó bán kính của mặt cầu là:

$R^2 = r^2 + d^2(I,\ (Q)) \Leftrightarrow R^2 = 5 \Leftrightarrow 14 - m = 5 \Leftrightarrow m = 9$.

Vậy giá trị cần tìm là: $m = 9$.

**3**. Gọi $H(-1 - t;\ 2t;\ 2 - t)$ là hình chiếu của $I(-1;\ 2;\ -3)$ trên $\Delta$.

Ta có $\overrightarrow{IH}(-t;\ 2t - 2;\ 5 - t)$ và $\overrightarrow{u_\Delta}(-1;\ 2;\ -2)$ nên

$IH \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow t + 4t - 4 - 10 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Vậy $\overrightarrow{IH}(-2;\ 2;\ 3) \Rightarrow IH = \sqrt{17}$.

Do tam giác $IAB$ cân tại $I$ nên vuông cân tại $I$, do đó tam giác $IHA$ cũng vuông cân tại $H$, vì thế

$R = IA = \sqrt{2}.IH = \sqrt{34} \Rightarrow \sqrt{14 - m} = \sqrt{34} \Rightarrow m = -20$.

Vậy giá trị cần tìm của $m$ là $m = -20$.

**Bài 11.**

**1.** Ta có $\overrightarrow{n_1} = (2;-2;-1)$, $\overrightarrow{n_2} = (1;2;-2)$ lần lượt là VTPT của $(\alpha)$ và $(\beta)$

Suy ra $\vec{u} = \dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (2;1;2)$ là VTCP của đường thẳng $d$

Hơn nữa điểm $A(6;4;5)$ là điểm chung của hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ nên $A \in d$

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-2;3;0)$, bán kính $R = \sqrt{13 - m}$ với $m < 13$.

$\overrightarrow{IA}=(8;1;5)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IA},\vec{u}\right]=(-3;-6;6)\Rightarrow d(I,d)=3$

Gọi $H$ là trung điểm $AB\Rightarrow AH=\dfrac{AB}{2}=4$ và $IH=3$

Trong tam giác vuông $IHA$ ta có: $IA^2=IH^2+AH^2\Leftrightarrow R^2=9+16$

$\Leftrightarrow 13-m=25\Leftrightarrow m=-12$.

Vậy $m=-12$ là giá trị cần tìm.

**2.** Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;-1;1)$, bán kính $R=3$.

Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $I$, vuông góc với $(P)$

Suy ra phương trình $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

Mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc với mặt cầu

$(S)\Leftrightarrow d(I,(P))=R\Leftrightarrow\dfrac{\left|m^2+3m-1\right|}{3}=3$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2+3m-10=0\\ m^2+3m+8=0\ \text{ VN}\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-5, m=2$.

Khi đó $(P):2x+2y+z-10=0$. Tọa độ tiếp điểm $A$ là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}\\ 2x+2y+z-10=0\end{cases}$, giải hệ này ta được $x=3, y=1, z=2\Rightarrow A(3;1;2)$.

**3.** Vì $A\in\Delta_1, B\in\Delta_2$ nên $A(-2+2a;-3+5a;4-a), B(3-b;1;10+b)$.

Do đó $\overrightarrow{AB}(5-b-2a;4-5a;6+b+a)$.

Ta có $\begin{cases}AB\perp\Delta_1\\ AB\perp\Delta_2\end{cases}$ nên $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}_{\Delta_1}=0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_{\Delta_2}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2(5-b-2a)+5(4-5a)-(6+b+a)=0\\ -5+b+2a+6+b+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10a+b=8\\ 3a+2b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-2\end{cases}$

Vì thế $A(0;2;3)$, $B(5;1;8)$.

Gọi $(\alpha_1)$, $(\alpha_2)$ lần lượt là các mặt phẳng qua $A$, vuông góc với $\Delta_1$ và mặt phẳng qua $B$, vuông góc với $\Delta_2$. Rõ ràng $AB$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha_1)$, $(\alpha_2)$.

Mặt cầu $(S)$ tiếp xúc với $\Delta_1$ tại $A$ và tiếp xúc với $\Delta_2$ tại $B$ nên tâm $I$ của mặt cầu thuộc mặt phẳng $(\alpha_1)$ và $(\alpha_2)$. Hay $I$ nằm trên giao tuyến $AB$ suy ra $I$ là trung điểm của $AB$.

Ta có $I\left(\frac{5}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{11}{2}\right), R = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{52}}{2}$ nên phương trình mặt cầu là:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{51}{4}.$$

**Bài 12.**

**1**. Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(2;-3;-3)$, bán kính $R=\sqrt{5}$

$d(I,(\alpha)) = 1 < R$ nên đường tròn (C) có bán kính $r = 2$

Gọi $H$ là tâm của (C), suy ra $IH:\begin{cases} x = 2+t \\ y = -3-2t \\ z = -3+2t \end{cases}$

Tọa độ của $H$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -3-2t \\ z = -3+2t \\ x-2y+2z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{7}{3} \\ z = -\frac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{5}{3};-\frac{7}{3};-\frac{13}{3}\right)$$

**2**. Gọi $d$ là đường thẳng đi qua $H$ và vuông góc với

$$(\alpha) \Rightarrow d:\begin{cases} x = \frac{5}{3}+t \\ y = -\frac{7}{3}-2t \\ z = -\frac{13}{3}+2t \end{cases}$$

Gọi $I', R'$ là tâm và bán kính của mặt cầu $(S')$

Vì $I' \in d, I' \in (P) \Rightarrow I': \begin{cases} x = \dfrac{5}{3} + t \\ y = -\dfrac{7}{3} - 2t \\ z = -\dfrac{13}{3} + 2t \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow I'\left(\dfrac{11}{3}; -\dfrac{19}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$

Suy ra $d(I', (\alpha)) = \dfrac{50}{9} \Rightarrow R' = \sqrt{r^2 + d^2(I', (\alpha))} = \dfrac{2\sqrt{706}}{9}$

Vậy phương trình $(S'): \left(x - \dfrac{11}{3}\right)^2 + \left(y + \dfrac{19}{3}\right)^2 + \left(z + \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{2824}{81}$.

**Bài 13.**

**1**. Ta có khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ bằng: $6$

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng song song $(P_1)$ và $(P_2)$ nên bán kính mặt cầu (S) là: $R = 3$.

**2**. Gọi $(R)$ là mặt phẳng song song với hai mặt phẳng $(P_1)$, $(P_2)$ và nằm ở giữa hai mặt phẳng đó, suy ra $(R): 2x - y + 2z + 2 = 0$

Gọi $I$ là tâm của mặt cầu, suy ra $I \in (R)$. Hơn nữa $IA = 3$ nên $I$ thuộc mặt cầu $(S')$ tâm $A$ bán kính bằng $3$. Do đó $I$ thuộc đường tròn (C) là giao của mặt cầu $(S')$ và mặt phẳng $(R)$. Từ đó ta tìm được tâm (C) là $H\left(-\dfrac{11}{9}; \dfrac{10}{9}; \dfrac{7}{9}\right)$, bán kính $r = \dfrac{4\sqrt{5}}{3}$.