Nên theo giả thiết ta có: $\cos\varphi = \dfrac{\left|\vec{n}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \dfrac{\left|-39a+30b\right|}{\sqrt{21}.\sqrt{a^2+b^2+(7b-10a)^2}}$

Suy ra $\cos\varphi = \dfrac{23}{\sqrt{679}} \Leftrightarrow \dfrac{\left|-39a+30b\right|}{\sqrt{21}.\sqrt{a^2+b^2+(7b-10a)^2}} = \dfrac{23}{\sqrt{679}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{97}\left|39a-30b\right| = 23\sqrt{3\left(101a^2+50b^2-140ab\right)}$

$\Leftrightarrow 3.97\left(13a-10b\right)^2 = 23^2\left(101a^2-140ab+50b^2\right)$

$\Leftrightarrow 85a^2+32ab-53b^2=0 \Leftrightarrow a=-b, a=\dfrac{53}{85}b$

- $a=-b$ ta chọn $b=-1 \Rightarrow a=1, c=-17$. Phương trình $(\alpha): x-y-17z+7=0$
- $a=\dfrac{53}{85}b$ ta chọn $b=85 \Rightarrow a=53, c=65$. Phương trình $(\alpha): 53x+85y+65z-43=0$.

2. a) Ta có: $\overrightarrow{n_{\alpha_1}}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{n_{\alpha_1}}=(2;3;4)$, $\overrightarrow{n_{\alpha_3}}=(1;-2;2)$ lần lượt là VTPT của ba mặt phẳng $(\alpha_1),(\alpha_2),(\alpha_3)$. Vì $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{1}{3}\neq\dfrac{1}{4}\Rightarrow(\alpha_1)$ và (α_2) cắt nhau.

Tương tự ta cũng chứng minh được hai mặt phẳng (α_1) và (α_3) cắt nhau.

b) Xét hệ phương trình : $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+3y+4z-1=0 \end{cases}$ (1)

- Cho $z=0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow B(8;-5;0)\in(\alpha_1)\cap(\alpha_2)$
- Cho $z=1 \Rightarrow x=9; y=-7 \Rightarrow C(9;-7;1)\in(\alpha_1)\cap(\alpha_2)$

Vì (P) đi qua A và giao tuyến của hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên $(P)\equiv(ABC)$.

Từ đó ta lập được phương trình của $(P): 7x+8y+9z-16=0$.

c) Vì (Q) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên (Q) đi qua hai điểm B, C.

Mặt khác: $(Q)\perp(\alpha_3)$ nên $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{n_{\alpha_3}}\right]=\left(-2;-1;0\right)$ là VTPT của (Q).

Vậy phương trình $(Q): 2x+y-11=0$.

3.

a)

Hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau khi và chỉ khi

$$\frac{4-a}{2}=\frac{-a-5}{3}=\frac{a}{b}=\frac{a}{5}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4-a}{2}=\frac{-a-5}{3}\\ \frac{-a-5}{3}=\frac{a}{b}=\frac{a}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=22\\ -9=\frac{22}{b}=\frac{22}{5}\end{cases}$$

Vậy không tồn tại a,b để hai mặt phẳng trùng nhau.

Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song khi $\frac{4-a}{2}=\frac{-a-5}{3}=\frac{a}{b}\neq\frac{a}{5}$, giải ra ta có

$$a=22,b=-\frac{22}{9}.$$

Hai mặt phẳng cắt nhau khi chúng không song song, không trùng nhau nên (P) và (Q) cắt nhau với mọi giá trị a,b trừ $a=22,b=-\frac{22}{9}$.

b)

Nếu $a=0$ thì $c=0$ nên thay vào thấy không thỏa mãn.

Nếu $c=0$ hoặc $c-a=0$ thì $a=0$ và cũng không thỏa mãn.

Xét $a\neq 0,c\neq 0,a\neq c$ thì hai mặt phẳng (P) và (Q) song song khi và chỉ khi $\frac{4-a}{3}=\frac{-a-5}{c}=\frac{a}{a(c-a)}\neq\frac{a}{c}$.

Do đó: $\frac{4-a}{3}=\frac{-a-5}{c}=\frac{1}{c-a}\Rightarrow\frac{4-a}{3}=\frac{-a-5-1}{c-c+a}\Rightarrow\frac{4-a}{3}=\frac{-a-6}{a}$

Hay $a^2-7a-18=0\Rightarrow a=9;a=-2$.

Với $a=9$ thì $c=\frac{42}{5}$ và với $a=-2$ thì $c=-\frac{3}{2}$.

Vậy các cặp số cần tìm là $(a;c)=\left(9;\frac{42}{5}\right),\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$.

c) Mặt phẳng (P) qua điểm $A(1;3;2)$ nên

$$4-a-3(a+5)+2a+a=0\Leftrightarrow a=-11.$$

Vì (P) vuông góc với (R) nên $3(4-a)-(a+5).c+a.a(c-a)=0$, hay

$$45+6c+121(c+11)=0\Leftrightarrow c=-\frac{1376}{127}.$$

Vậy giá trị cần tìm của a,c là $(a;c)=\left(-11;-\frac{1376}{127}\right)$.

Bài 12 Ta kí hiệu $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}$ để chỉ VTPT của mặt phẳng (α).

1. Ta có $\overrightarrow{AB}(-1;-5;3), \vec{n}_{(P)}(2;-1;-1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(P)}\right] = (8;5;11).$

Mặt phẳng (α) qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên

$$\overrightarrow{n_{(\alpha)}} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(\alpha)}} \perp \overrightarrow{n_{(P)}} \Rightarrow \overrightarrow{n_{(\alpha)}} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(P)}}\right] = (8;5;11).$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm: $8x+5y+11z-7=0.$

2. Gọi $M(x;y;z)$ là một điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (α).

Ta có $d(M,(\beta)) = d(M,(\gamma)) \Leftrightarrow \dfrac{|x+2y-2z+2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \dfrac{|2x+2y+z+3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}$

$$\Leftrightarrow |x+2y-2z+2| = |2x+2y+z+3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y-2z+2 = 2x+2y+z+3 \\ x+2y-2z+2 = -2x-2y-z-3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3z+1=0 \\ 3x+4y-z+5=0 \end{array}\right..$$

Vậy có hai mặt phẳng (α) cần tìm là

$$(\alpha): \ x+3z+1=0 \text{ hoặc } (\alpha): \ 3x+4y-z+5=0.$$

3. Mặt phẳng (α) đi qua điểm $C(-1;0;2)$ nên có phương trình dạng

$$a(x+1)+by+c(z-2)=0, \ a^2+b^2+c^2>0.$$

Vì (α) qua $D(1;-2;3)$ nên $2a-2b+c=0 \Rightarrow c=2b-2a$ (1).

Ta có $d(O,(\alpha))=2$ nên $\dfrac{|a-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2 \quad (2).$

Thế (1) vào (2) rồi bình phương, rút gọn ta thu được

$$5a^2-8ab-4b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ a=-\dfrac{2}{5}b \end{array}\right.$$

Do $a^2+b^2+c^2>0$ nên

- Với $a=2b$ thì chọn $b=1 \Rightarrow a=2, c=-2,$ do đó phương trình $(\alpha): 2x+y-2z+6=0.$
- Với $a=-\dfrac{2}{5}b$ thì chọn $b=-5 \Rightarrow a=2, c=-14,$ do đó phương trình mặt phẳng (α) là $2x-5y-14z+30=0.$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn $2x+y-2z+6=0,$ $2x-5y-14z+30=0.$

4. Mặt phẳng (α) qua $E(0;\ 1;\ 1)$ có phương trình dạng:

$$Ax+B(y-1)+C(z-1)=0, \ A^2+B^2+C^2>0.$$

Theo bài ra $d(A,(\alpha)) = 2; d(B,(\alpha)) = \dfrac{11}{7}$ nên

$$\begin{cases} \dfrac{|A+B-2C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 2 \\ \dfrac{|-4B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{11}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A+B-2C| = 2\sqrt{A^2+B^2+C^2} & (1) \\ 11|A+B-2C| = 14|-4B+C| & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta có $\left[\begin{array}{l} 11(A+B-2C) = 14(-4B+C) \\ 11(A+B-2C) = 14(4B-C) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{-67B+36C}{11} \\ A = \dfrac{45B+8C}{11} \end{array}\right.$

- Với $A = \dfrac{-67B+36C}{11}$, thay vào (1) ta có phương trình

$$\left(\frac{-56B+14C}{11}\right)^2 = 4\left[\left(\frac{-67B+36C}{11}\right)^2 + B^2 + C^2\right] \Leftrightarrow 3826B^2 - 4432BC + 1368C^2 = 0 \quad (3)$$

Phương trình (3) chỉ có nghiệm $B = C = 0,$ khi đó $A = 0$ (không thỏa mãn điều kiện $A^2+B^2+C^2 > 0$)

- Với $A = \dfrac{45B+8C}{11}$, thay vào (1) ta có phương trình

$$\left(\frac{56B-14C}{11}\right)^2 = 4\left[\left(\frac{45B+8C}{11}\right)^2 + B^2 + C^2\right] \Leftrightarrow 1362B^2 + 1112BC + 136C^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow B = -\frac{2}{3}C, B = -\frac{34}{227}C.$$

- Với $B = -\dfrac{2}{3}C$ thì chọn $C = -3 \Rightarrow B = 2, A = 6$ phương trình

$(\alpha): 6x+2y-3z+1 = 0.$

- Với $B = -\dfrac{34}{227}C$ thì chọn $C = 227 \Rightarrow B = -34, A = 26$ phương trình (α) là

$$26x - 34y + 227z - 193 = 0.$$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là:
$6x+2y-3z+1=0,\ \ 26x-34y+227z-193=0.$

5. (α) qua $A(1;2;3)$ nên có phương trình dạng