điểm đó nằm trên mặt cầu (S) tâm I, bán kính R. Với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow R = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = \dfrac{4\pi}{\sin^2\alpha}a^2$.

Thể tích khối cầu $V = \dfrac{4\pi}{3}R^3 = \dfrac{4\pi}{3\sin^3\alpha}a^3$.

4. Gọi I là trung điểm của BC, ta có $AI \perp BC$.

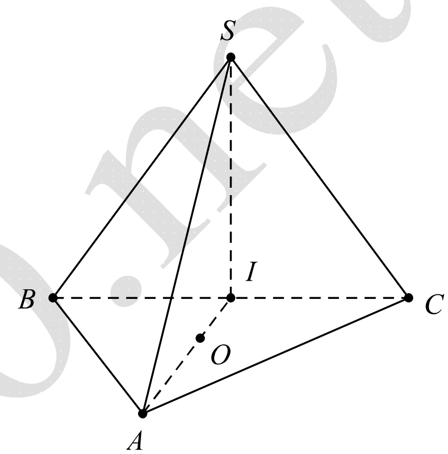
Mặt khác $(SBC) \perp (ABC)$ nên

$AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SI \Rightarrow SI$ là đường cao của tam giác SBC.

Ta có

$\Delta ABI = \Delta ASI \Rightarrow IS = IB = IC \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC

Gọi O là tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ ta có $OS = OB = OC$ nên O thuộc thẳng



d qua I vuông góc với (SBC).

Ta có $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow d \subset (ABC) \Rightarrow O \in (ABC) \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Gọi K là giao của AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có : $AB^2 = AI.AK = AI.2R \Rightarrow R = \dfrac{AB^2}{2AI}$.

Ta có: $AI^2 = AB^2 - BI^2 = a^2 - \dfrac{BC^2}{4} = a^2 - \dfrac{SB^2 + SC^2}{4}$

$$= a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4} = \frac{3a^2 - x^2}{4} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2} \quad (0 < x < \sqrt{3}a)$$

Vậy $R = \dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}}$.

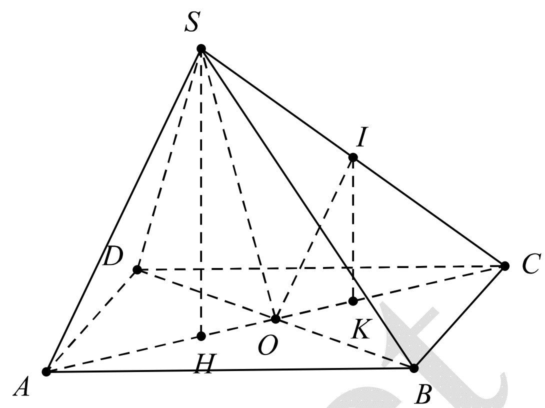
Bài 2

1. Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình thoi $ABCD$.

Theo bài ra ta có $BD = a$. Mà tam giác ΔSBD vuông tại S nên

$SB = SD = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a, SO = \dfrac{a}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD (do các cạnh bên $SA = SB = SC$).



Ta có $SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}a,\ SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a.$

Gọi K là tâm của tam giác đều BCD thì K là trung điểm của HC, trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD đi qua K và song song với SH nên là trung trực của HC cắt SC tại điểm I. Ta có I là trung điểm của SC nên $IS = IC$, do đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $SBCD$.

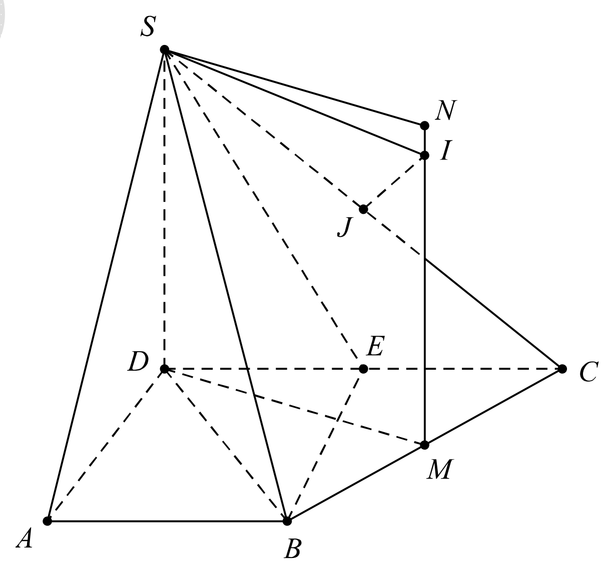
Bán kính của mặt cầu là $R = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a.$

Bài 3

1. Vì $AB = DE = AD = a$ và $DAB = 1v$ nên $ABED$ là hình vuông.

Tam giác BCD có $EB = ED = EC = a$ nên vuông tại $B, BE \perp CD$ nên trung điểm M của BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC. Dựng Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC thì Δ song song với SD.

Dựng mặt phẳng trung trực cạnh SC, mặt phẳng đó cắt Δ tại I.



Điểm I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$.

Kẻ $SN\,//\,DM$ cắt MI tại N, ta có $SDMN$ là hình chữ nhật với $SD = a$ và

$$DM^2=\frac{DB^2+DC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=\frac{AB^2+AD^2+DC^2}{2}-\frac{EC^2+EB^2}{4}=\frac{5a^2}{2}.$$

Ta có $SI^2=SN^2+NI^2=SN^2+(NM-IM)^2=\frac{5}{2}a^2+(a-IM)^2$

Mà $IC^2=IM^2+MC^2=IM^2+\frac{a^2}{2}$ và

$$R=IC=IS\Rightarrow\frac{5}{2}a^2+(a-IM)^2=IM^2+\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow IM=\frac{3}{2}a$$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$ là

$$R=\sqrt{IM^2+\frac{a^2}{2}}=\frac{\sqrt{11}}{2}a.$$

2. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Gọi O là trung điểm đoạn thẳng AD, ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Kẻ Ox song song với SA, ta có Ox là trục đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Trong tam giác SAC từ trung điểm J của cạnh SA kẻ Jy song song với AC, ta có Jy là đường trung trực cạnh SA.

Gọi I là giao điểm của Ox và Jy.

Ta có I thuộc Ox nên $IA=IB=IC=ID$ và I thuộc Jy nên $IS=IA$.

Vậy I là tâm mặt cầu đi qua năm điểm S,A,B,C,D và bán kính mặt cầu này là $r=IA$.

Theo giải thiết ta có: $SCA=\left((SCD),(P)\right)=60^0$.

Suy ra $AC=AD\sin 60^0=\sqrt{3}R, SA=AC\tan 60^0=3R$.

Tứ giác $AOIJ$ là hình chữ nhật nên $AI=\sqrt{AJ^2+AO^2}=\frac{\sqrt{13}R}{2}$.

Vậy bán kính mặt cầu là $r=\frac{\sqrt{13}R}{2}$.

Bài 4

1. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Do O cách đều AB nên O thuộc mặt phẳng trung trực cạnh AB. Đó chính là mp(MCD). Với M là trung điểm AB. Tương tự O cách đều CD nên O thuộc mp trung trực cạnh CD là mp (NAB), với N là trung điểm CD. Vậy O nằm trên giao tuyến MN của mp(MCD) và (NAB). Do $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.

$OA = OD = R; OM = \sqrt{R^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - 9}, ON = \sqrt{R^2 - ND^2} = \sqrt{R^2 - 16}$

$DM^2 = AD^2 - AM^2 = 65 \Rightarrow MN^2 = DM^2 - DN^2 = 49 \Rightarrow MN = 7$.

- Nếu O nằm trong hình chóp thì $MN = OM + ON$.

Suy ra $7 = \sqrt{R^2 - 9} + \sqrt{R^2 - 16} \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5$.

- Nếu O nằm ngoài hình chóp thì $MN = OM - ON$.

Suy ra $7 = \sqrt{R^2 - 9} - \sqrt{R^2 - 16}$ phương trình vô nghiệm. Vậy bán kính $R = 5$.

2. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và gọi Q là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QP} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{QP} = \vec{0}$ (điểm Q chia đoạn PG theo tỉ số -4).

Vì G_a là trọng tâm của tứ diện $PBCD$ nên

$$\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QP} = 4\overrightarrow{QG_a} \Rightarrow \overrightarrow{QA} + 4\overrightarrow{QG_a} = \vec{0}$$

Hay điểm Q nằm trên đường thẳng AG_a.

Tương tự, điểm Q cũng thuộc các đường thẳng BG_b, CG_c, DG_d.

Vậy các đường thẳng AG_a, BG_b, CG_c, DG_d đồng quy tại Q.

Ta có $4\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{QP} = \vec{0}$ nên $\overrightarrow{GQ} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{GP}$, hay Q là ảnh của P qua phép vị tự tâm G, tỉ số $-\frac{1}{5}$.

Vậy Q nằm trên mặt cầu là ảnh của mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ qua phép vị tự tâm G, tỉ số $-\frac{1}{5}$.

Bài 5

1. Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của BC, $B'C'$.

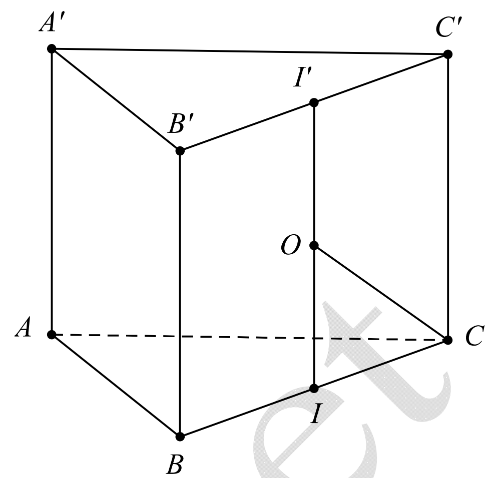
Ta có I, I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $ABC,\ A'B'C'$.

Gọi O là trung điểm của II' ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Bán kính $R = OC$.

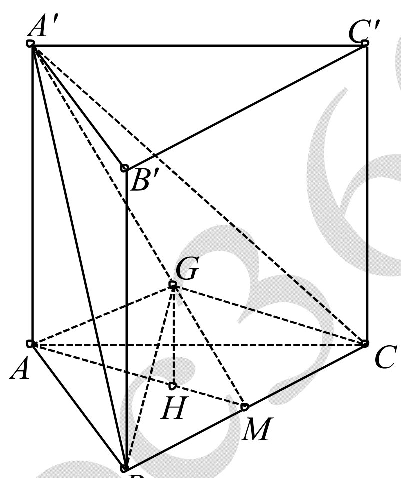
Do $IC = \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2\cos 60^0} = a;$

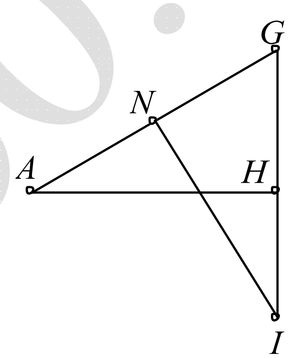
$\Rightarrow R = \sqrt{OI^2 + IC^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$



2. Gọi M là trung điểm của BC. Do tam giác ABC đều nên $BC \perp AM$

Suy ra $A'M \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc). Vậy $A'MA = 60^0$.





Ta có $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ nên $A'A = AM.\tan A'MA = \frac{3}{2}a.$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V = AA'.S_{ABC} = \frac{3}{2}a.\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3.$

Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $\frac{MG}{MA'} = \frac{1}{3} = \frac{MH}{MA}$ nên $GH // AA' \Rightarrow GH \perp (ABC)$. Do H cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên GH là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi I là giao điểm của GH với trung trực của GA (qua trung điểm N của GA) thì đó là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$.

Ta có $\Delta IGN \sim \Delta AGH$ nên $\frac{IG}{AG} = \frac{GN}{GH}$, suy ra bán kính mặt cầu

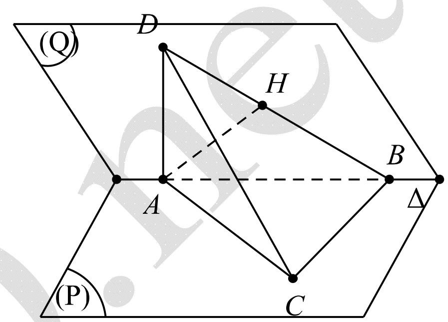
$R = \frac{GA.GN}{GH} = \frac{GA^2}{2GH}$.

Vì $GH = \frac{AA'}{3} = \frac{a}{2}$ nên $GA^2 = GH^2 + HA^2 = \frac{7}{12}a^2$. Vậy $R = \frac{7}{12}a$.

Bài 6

Vì $(P) \perp (Q)$ và $CA \perp \Delta$ nên $CA \perp (Q) \Rightarrow CA \perp AD$.

Tương tự $BD \perp BC$, nên các điểm B, A cùng nhìn đoạn CD dưới một góc vuông, do đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có tâm là trung điểm CD và có bán kính $R = \frac{CD}{2}$. Áp dụng Pitago cho các tam giác



ABD, ACD ta có: $R = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + AB^2 + BD^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Kẻ $AH \perp BC$ thì H là trung điểm của BC (do tam giác ABC vuông cân A).

Ta có: $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + AB^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Vì $BD \perp (ABC) \Rightarrow BD \perp AH$ nên $AH \perp (CBD)$.

Vậy $d(A,(BCD)) = AH = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Bài 7 *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

1. Gọi G là trọng tâm tứ diên, H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$, khi đó ta có:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\overrightarrow{A_1A_0} = \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OG})$

$\overrightarrow{A_0H} = \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{A_0A_1} + (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OG}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_0}$

Suy ra A_0, A_1, H thẳng hằng hay A_0A_1 đi qua H

Chứng minh tương tự ta cũng có B_0B_1, C_0C_1, D_0D_1 cũng đi qua H.

Vậy $A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0, D_1D_0$ đồng quy tại điểm H

2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD ta có

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OH} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{ON}$$

Mà $ON \perp CD \Rightarrow MH \perp CD$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có được các đường thẳng đi qua H và trung điểm của một cạnh thì vuông góc với cạnh đối diện.

Bài 8 *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

1. Gọi I, I' lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC, A'B'C'$ và O là trung điểm của II'. Ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ. Bán kính $R = OC$. Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có :

$$IC = r = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{k}{2\sin\alpha} \Rightarrow R = \sqrt{IC^2 + IO^2} = \frac{\sqrt{k^2 + h^2\sin^2\alpha}}{2\sin\alpha}$$

2. Ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\alpha \geq \frac{(AB + AC)^2}{2} - (AB + AC)^2\cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow k^2 \geq \frac{a^2}{2} - a^2\cos^2 60^0 = \frac{a^2}{4}.$$

Vậy R nhỏ nhất khi k nhỏ nhất hay tam giác ABC đều cạnh $\frac{a}{2}$.

Bài 9

(Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABCD), M là trung điểm của CD.

Phân giác trong góc SHM cắt SH tại J là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp.

Đặt $SMH = 2\varphi\,(0 < \varphi < 45^0)$ ta có $HM = HJ.\cot\varphi \Rightarrow a = 2r.\cot\varphi$ và

$$SH = HM.\tan 2\varphi = r.\cot\varphi.\tan 2\varphi$$

nên thể tích khối chóp $S.ABCD$