Ta thấy các điểm A, C nằm cùng phía và A, B nằm khác phía so với (P).

1. Ta có $MA + MB \geq AB$ và A, B nằm khác phía so với (P) nên

$\min(MA + MB) = AB$ khi và chỉ khi $M = AB \cap (P)$.

Phương trình đường thẳng $AB : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad (t \in R).$

Ta có $M \in AB \Rightarrow M(1 - 3t;\ -1 + 2t;\ 2 - 2t)$, mà $M \in (P)$ nên

$$2(1 - 3t) - (-1 + 2t) - (2 - 2t) + 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

Vậy $M\left(-1; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ là điểm cần tìm.

2. Ta có $\left|MA - MC\right| \leq AB$ và A, C nằm cùng phía so với (P) nên

$\max\left(\left|MA - MB\right|\right) = AC$ khi và chỉ khi $M = AC \cap (P)$.

Tọa độ điểm M thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{-1} \\ 2x - y - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-1;\ -3;\ 4).$

Vậy $M(-1;\ -3;\ 4)$ là điểm cần tìm.

3. Gọi $H(x;\ y;\ z)$ là hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (P).

Ta tìm được $H\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), suy ra $A'\left(-\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Vì A, C ở cùng phía so với (P) nên A', C ở khác phía so với (P).

Ta có $MA + MC = MA' + MC \geq A'C$ nên $\min(MA + MC) = A'C$ khi và chỉ khi

$M = A'C \cap (P)$.

Do $\overrightarrow{A'C} = \frac{1}{3}(11;\ -1;\ -7)$ nên $A'C: \dfrac{x-2}{11} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{-7}$.

Từ đó ta tìm được tọa độ điểm $M\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{12}{5}\right)$.

4. Gọi A' đối xứng với A qua (P) thì $A'\left(-\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Vì A, B ở khác phía so với (P) nên A', B ở cùng phía so với (P).

Ta có $|MA - MB| = |MA' - MB| \le A'B$ nên $\max(|MA - MB|) = A'B$ khi và chỉ khi $M = A'B \cap (P)$.

Do $\overrightarrow{A'B} = -\frac{1}{3}(1;\ -2;\ 10)$ nên $A'B: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{10}$.

Suy ra tọa độ điểm M cần tìm là $M\left(-\frac{7}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{10}{3}\right)$.

Bài 11.

1. Gọi $\overrightarrow{u_d} = (a;\ b;\ c)$ là VTCP của d, trong đó $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Vì $d \perp \Delta$ nên $\vec{u}_d.\vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow a - 2b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a + 2b.$

Vì d' qua $M(0;\ -1;\ 1)$ và có $\overrightarrow{u_{d'}} = (2;\ -2;\ -1)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{u_{d'}}, \overrightarrow{u_d}\right] = (2a - 3b;\ a - 4b;\ 2a + 2b)$.

Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng là

$$d(d',\ d) = \frac{\left|\left[\vec{u}_{d'}, \vec{u}_d\right].\overrightarrow{OM}\right|}{\left|\left[\vec{u}_{d'}, \vec{u}_d\right]\right|} = \frac{|a + 6b|}{\sqrt{(2a - 3b)^2 + (a - 4b)^2 + (2a + 2b)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a + 6b)^2}{9a^2 - 12ab + 29b^2}}$$

- Nếu $b = 0$ thì $a \ne 0$ nên $d(d'; d) = \frac{1}{3}$.
- Nếu $b \ne 0$ thì đặt $t = \frac{a}{b}, t \in \mathbb{R},$ khi đó:

$$d(d',\ d)=\sqrt{\frac{(t+6)^2}{9t^2-12t+29}}=\sqrt{f(t)},\ f(t)=\frac{(t+6)^2}{9t^2-12t+29}.$$

Ta có $f'(t)=\dfrac{2(t+6)(65-60t)}{(9t^2-124t+29)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-6;\ t=\dfrac{13}{12}$.

Vì $f(-6)=0;\ f\left(\dfrac{13}{12}\right)=\dfrac{17}{9};\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(t)=\dfrac{1}{9}$ nên $\max f(t)=\dfrac{17}{9}$ khi và chỉ khi $t=\dfrac{13}{12}$.

So sánh các trường hợp ta có $\max(d(d',\ d))=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$ khi $b=12; a=13; c=11,$ hay phương trình đường thẳng cần tìm là

$d:\ \dfrac{x}{13}=\dfrac{y}{12}=\dfrac{z}{11}$.

2. Ta có $\overrightarrow{AB}(-3;\ 3;\ 0),\ \overrightarrow{BC}(0;\ -3;\ 3),\ \overrightarrow{CA}(3;\ 0;\ -3)$ nên $AB=BC=CA=3\sqrt{2}.$

Tam giác ABC là tam giác đều. Các điểm A, B, C thuộc đường tròn (C).

Đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S) có tâm $I(1;\ 1;\ 2)$, bán kính $R=3$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-7=0.$

Tâm J của đường tròn (C) là trọng tâm tam giác ABC nên $J(2;\ 2;\ 3).$

Bán kính của đường tròn (C) là $r=\sqrt{R^2-IJ^2}=\sqrt{6}.$

Bài toán trở thành bài toán hình phẳng: Xét tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(J,\sqrt{6})$. Tìm điểm $M\in(C)$ sao cho $MA+MB+MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Giả sử M thuộc cung BC, khi đó $MA=MB+MC$.

Vì vậy $MA+MB+MC=2MA\le 2.2r=4\sqrt{6}.$

Dấu đẳng thức có khi M đối xứng với A qua J, nên $M(0;\ 3;\ 4).$

Tương tự cho trường hợp M thuộc cung $CA,\ AB$ ta tìm được các điểm tương ứng là $M(3;\ 0;1),\ M(3;\ 3;\ 1).$

Vậy giá trị lớn nhất của $MA+MB+MC$ là $4\sqrt{6}$, đạt được khi điểm M là một trong ba điểm $M(0;\ 3;\ 4),\ M(3;\ 0;1),\ M(3;\ 3;\ 1).$

Bài 12. Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ thì (ABC) có phương trình là

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

1. Mặt phẳng cần tìm $\frac{x}{-6}+\frac{y}{9}+\frac{z}{3}=1.$

2. Mặt phẳng cần tìm $5x-3y-2z-38=0.$

3. $d(O,(ABC))\le OM$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình

$$x-2y+3z-14=0.$$

4. Có ba mặt phẳng thỏa mãn

$$x+y+z-6=0,\ x-y+z-2=0,\ x-y-z+4=0.$$

5. Mặt phẳng (ABC) có dạng $\frac{x}{-2}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

Vì $P(2;3;1)\in(ABC)$ nên $\frac{2}{-2}+\frac{3}{b}+\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow \frac{3}{b}+\frac{1}{c}=2\ (1).$

Vì $OB=1+2OC$ nên $|b|=1+2|c|\ (2).$

Giải hệ phương trình (1) và (2) ta có các mặt phẳng thỏa mãn là

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1,\ \frac{x}{-2}-\frac{2y}{3}+4z=1.$

Bài 13. $(P): x-y+z+1=0$ và $A(1;1;1),\ B(0;1;2), C(-2;0;1).$

1. Vì $M(x;\,1;\,z)\in(P)$ nên $x=-z.$ Từ $MA=MB$ suy ra $x-z+1=0.$

Vậy tọa độ điểm M cần tìm là $M\left(-\frac{1}{2};\,1;\,\frac{1}{2}\right).$

2. Gọi $N(a;\,b;\,c)$ thì $a-b+c+1=0.$ Ta có

$$T=2NA^2+NB^2+NC^2=3(2a^2+b^2+c^2)-6b-10c+16$$

$$=6\left(a+\frac{1}{3}\right)^2+3\left(b-\frac{5}{3}\right)^2+3(c-1)^2+8\ge 8.$$

Khi đó điểm N có tọa độ $N\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{3};1\right).$

Bài 14.

1. Cách 1: Phương pháp hình học.

Theo chứng minh trong phần phương pháp ta có

Đường thẳng d đi qua A và cách B khoảng lớn nhất là đường thẳng có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d=\left[\vec{n}_{(P)},\overrightarrow{AB}\right].$

Vì $\vec{n}_{(P)}(1;\ 2;\ -1), \overrightarrow{AB}(-1;\ 2;\ -3)$ nên $\vec{u}_d = 4(-1;\ 1;\ 1)$.

Phương trình đường thẳng cần tìm là $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

Đường thẳng d đi qua A và cách B khoảng nhỏ nhất là đường thẳng có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d = \left[\vec{n}_{(P)}, \left[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AB}\right]\right]$.

Vì $\vec{n}_{(P)}(1;\ 2;\ -1), \overrightarrow{AB}(-1;\ 2;\ -3)$ nên $\left[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AB}\right] = 4(-1;\ 1;\ 1)$, do đó $\vec{u}_d = 12(1;\ 0;\ 1)$.

Phương trình đường thẳng cần tìm là $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Cách 2: Phương pháp hàm số.

Gọi véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d = (a;\ b;\ c)$, trong đó $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Vì $d \subset (P)$ nên $\vec{u}_d.\vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow a + 2b - c = 0 \Leftrightarrow c = a + 2b$.

Vì $\overrightarrow{AB}(-1;\ 2;\ -3)$ nên $\left[\vec{u}_d, \overrightarrow{AB}\right] = (-2a - 7b;\ 2a - 2b;\ 2a + b)$, do đó khoảng cách từ B đến đường thẳng d là

$$d(B,\ d) = \frac{\left|\left[\vec{u}_d, \overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\vec{u}_d\right|} = \sqrt{\frac{(2a+7b)^2 + (2a-2b)^2 + (2a+b)^2}{a^2 + b^2 + (a+2b)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{12a^2 + 24ab + 54b^2}{2a^2 + 4ab + 5b^2}}$$

Nếu $b = 0$ thì $a \neq 0$ nên $d(B;d) = \sqrt{6}$.

Nếu $b \neq 0$ thì đặt $t = \dfrac{a}{b}, t \in \mathbb{R}$, khi đó

$$d(B,\ d) = \sqrt{\frac{12t^2 + 24t + 54}{2t^2 + 4t + 5}} = \sqrt{f(t)},\ f(t) = \frac{12t^2 + 24t + 54}{2t^2 + 4t + 5}.$$

Ta có: $f(t) = 6 + \dfrac{24}{2t^2 + 4t + 5} = 6 + \dfrac{24}{2(t+1)^2 + 3} \Rightarrow 6 < f(t) \le 14$

Hay $\sqrt{6} < d(B;\ d) \le \sqrt{14}$.

Kết hợp các trường hợp, ta được $\sqrt{6} \le d(B;\ d) \le \sqrt{14}$.

Giá trị nhỏ nhất của $d(B;\, d)$ là $\sqrt{6}$, đạt được khi $b=0$, chọn $a=1$ thì có $c=1$ nên phương trình đường thẳng cần tìm là $d:\begin{cases}x=1+t\\ y=0\\ z=t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$.

Giá trị lớn nhất của $d(B;\, d)$ là $\sqrt{14}$, đạt được khi $a=-b$, chọn $b=-1$ thì $a=1;\ c=-1$ nên phương trình đường thẳng cần tìm là:

$d:\ \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$.

2. Đường thẳng d qua A và song song với (Q) tức là d nằm trong mặt phẳng $(P): 2x-y-z-1=0$.

Cách 1: Phương pháp hình học tổng hợp.

Góc giữa d và d' lớn nhất bằng 90^0, khi đó d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=\left[\vec{u}_{d'},\, \vec{n}_{(Q)}\right]=(4;\, 5;\, 3)$.

Phương trình đường thẳng $d:\ \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{3}$.

Góc giữa d và d' nhỏ nhất khi d đi qua A và song song với hình chiếu của d' trên mặt phẳng (P).

Một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=\left[\vec{n}_{(Q)},\left[\vec{u}_{d'},\, \vec{n}_{(Q)}\right]\right]=2(1;\, -5;\, 7)$.

Phương trình đường thẳng $d:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{7}$.

Cách 2: Phương pháp hàm số.

Gọi véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d=(a;\, b;\, c)$, trong đó $a^2+b^2+c^2>0$.

Vì $d\,//(Q)$ nên $\vec{u}_d.\vec{n}_{(Q)}=0 \Leftrightarrow 2a-b-c=0 \Leftrightarrow c=2a-b$.

Ta có $\vec{u}_{d'}=(1;\, -2;\, 2)$ nên góc φ của hai đường thẳng thỏa mãn

$$\cos\varphi=\left|\cos(\vec{u}_d;\, \vec{u}_{d'})\right|=\frac{|5a-4b|}{3\sqrt{5a^2-4ab+2b^2}}$$

Nếu $b=0$ thì $a\neq 0$ nên $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Nếu $b\neq 0$ thì đặt $t=\dfrac{a}{b}, t\in\mathbb{R}$, khi đó

$$\cos\varphi=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}}=\frac{1}{3}\sqrt{f(t)},\ f(t)=\frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}.$$

Ta có $f'(t)=\dfrac{2(5t-4)(10t+2)}{(5t^2-4t+2)^2}$ nên ta tìm được

$$\max f(t)=f\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{25}{3},\ \min f(t)=f\left(\frac{4}{5}\right)=0.$$

Giá trị nhỏ nhất của φ là $\arccos\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$, khi $t=-\dfrac{1}{5}$, hay $b=-5;\ a=1;\ \ c=7.$

Phương trình đường thẳng cần tìm $d:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{7}.$

Giá trị lớn nhất của φ là 90^0, khi $t=\dfrac{4}{5}$, hay $b=5;\ a=4;\ c=3.$ Phương trình đường thẳng cần tìm $d:\ \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{3}.$

3. Giả sử d cắt d' tại điểm M thì $M(1+2t;\ 2+t;\ -2-t),\ t\in\mathbb{R}.$

Véc tơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{AM}(2t+2;\ t+2;\ -1-t).$

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta(-1;\ 2;\ 2).$

Gọi góc giữa đường thẳng Δ và đường thẳng d là φ. Ta có

$$\cos\varphi=\left|\cos(\vec{u}_\Delta,\overrightarrow{AM})\right|=\frac{|-1.(1+2t)+2.(2+t)+2.(-2-t)|}{3.\sqrt{(2t+2)^2+(t+2)^2+(-1-t)^2}}$$

$$=\frac{|2t|}{3.\sqrt{6t^2+14t+9}}=\frac{2}{3}.\sqrt{\frac{t^2}{6t^2+14t+9}}=\frac{2}{3}.\sqrt{f(t)}$$

Trong đó $f(t)=\dfrac{t^2}{6t^2+14t+9}.$

Ta có $f'(t)=\dfrac{2t(7t+9)}{(6t^2+14t+9)^2}$, do đó dễ dàng tìm được

$$\min f(t)=f(0)=0,\max f(t)=f\left(-\frac{9}{7}\right)=\frac{9}{5}.$$

Vì với $\varphi\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thì hàm số $y=\cos\varphi$ nghịch biến, nên

Giá trị lớn nhất của φ là $\dfrac{\pi}{2}$ đạt được khi $t=0\Rightarrow\overrightarrow{AM}(2;\ 2;\ -1),$

hay đường thẳng d là $d:\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}.$

Giá trị nhỏ nhất của φ là $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ đạt được khi $t=-\dfrac{9}{7}$, suy ra