

nên $SI \perp (ABCD)$.

Đặt $SI = x, x > 0$, tọa độ các điểm

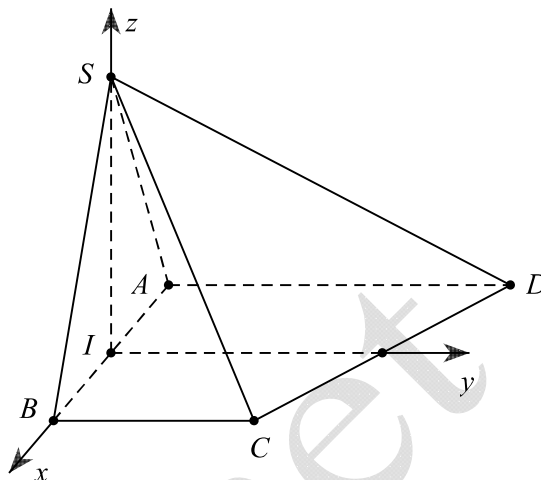
là: $I(0; 0; 0), A(-a; 0; 0),$

$B(a; 0; 0), C(a; a; 0), D(-a; 2a; 0),$

$S(0; 0; x)$. Suy ra $\overrightarrow{SC} = (a; a; -x),$

$\overrightarrow{CD} = (-2a; a; 0)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{CD}] = (ax; 2ax; 3a^2)$$



Nên $\vec{n}_1 = (x; 2x; 3a)$ là VTPT của mặt phẳng (SCD) .

Mà $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là VTPT của mặt đáy nên theo giả thiết đề bài ta có

$$\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{k}|} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3a}{\sqrt{5x^2 + 9a^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$$

Mặt khác: $S_{ABCD} = \frac{AB(BC + AD)}{2} = 3a^2$ nên thể tích khối chóp là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{15}}{5} \cdot 3a^2 = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$$

3. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Ta có tọa độ các đỉnh

$A(0; 0; 0), B(a; 0; 0),$

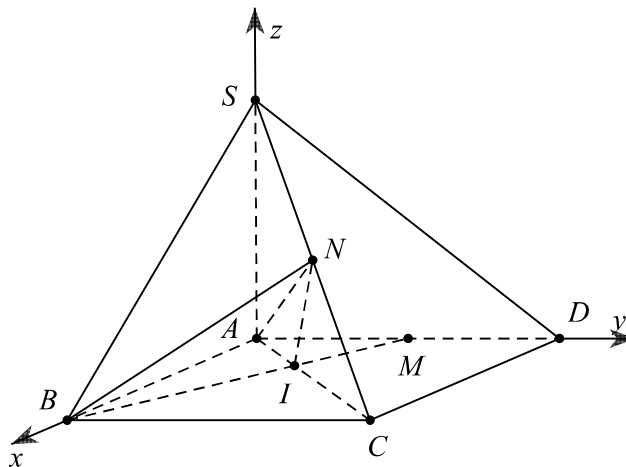
$D(0; a\sqrt{2}; 0), C(a; a\sqrt{2}; 0)$

$S(0; 0; a)$

$M\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), N\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}\right)$

Suy ra: $\overrightarrow{BM} = \left(-a; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$

$\overrightarrow{AC} = (a; a\sqrt{2}; 0)$



$$\text{Phương trình } BM : \begin{cases} x = a - 2t \\ y = \sqrt{2}t \\ z = 0 \end{cases}, \text{ phương trình } AC : \begin{cases} x = t' \\ y = \sqrt{2}t' \\ z = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được giao điểm $I \left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0 \right)$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AS} = (0; 0; a), \overrightarrow{AC} = (a; a\sqrt{2}; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}] = (-a^2\sqrt{2}; a^2; 0)$$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (\sqrt{2}; -1; 0)$ là VTPT của (SAC)

$$\overrightarrow{SM} = \left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; -a \right) \Rightarrow [\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BM}] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; a^2; \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \right)$$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (1; \sqrt{2}; 1)$ là VTPT của (SMB).

Vì $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \Rightarrow (SAC) \perp (SMB)$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AN} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2} \right), \overrightarrow{AI} = \left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0 \right), \overrightarrow{AB} = (a; 0; 0)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AI}] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{6}; \frac{a^2}{6}; 0 \right) \Rightarrow [\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AI}] \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{Vậy } V_{ANIB} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AI}] \cdot \overrightarrow{AB}| = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$$

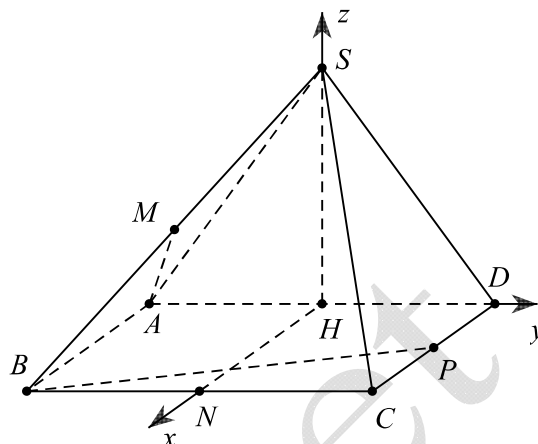
4. Gọi H là trung điểm $AD \Rightarrow SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$$H(0;0;0), A\left(0;-\frac{a}{2};0\right), D\left(0;\frac{a}{2};0\right),$$

$$N(a;0;0), B\left(a;-\frac{a}{2};0\right),$$

$$C\left(a;\frac{a}{2};0\right), S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$M\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right), P\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$$



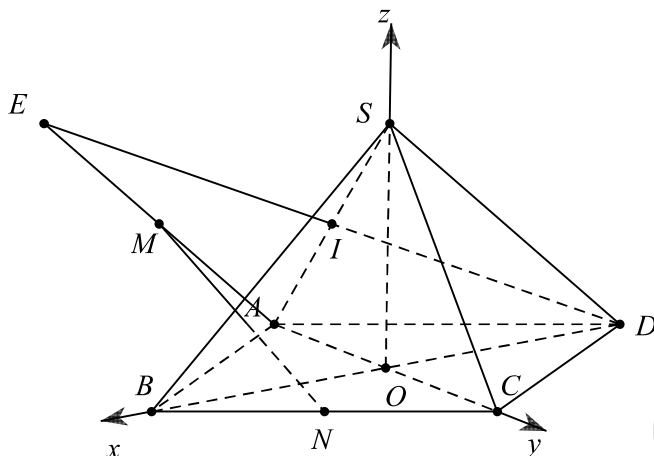
$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{BP} = \left(-\frac{a}{2}; a; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Rightarrow AM \perp BP.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{CM} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{3a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{CN} = \left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), \overrightarrow{CP} = \left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CP}] = \left(0; 0; -\frac{a^2}{4}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CP}] \cdot \overrightarrow{CM} = -\frac{a^3\sqrt{3}}{16}.$$

$$\text{Vậy } V_{CMNP} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CP}] \cdot \overrightarrow{CM}| = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}.$$

5. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Đặt $SO = h$ và gọi I là trung điểm SA .



Ta có tọa độ các đỉnh là:

$$A\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$$

$$S(0; 0; h), I\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{h}{2}\right), N\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right), E\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; h\right),$$

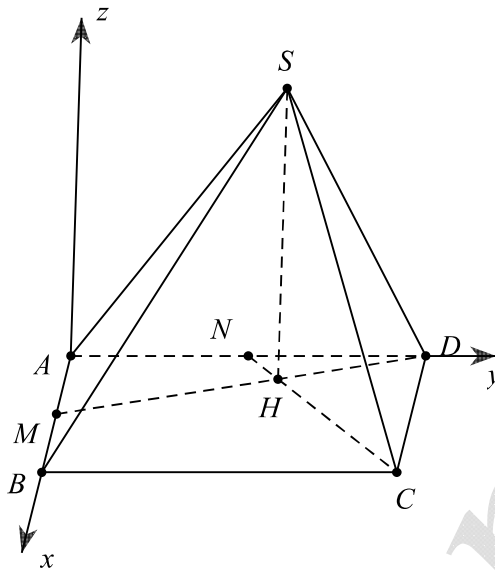
$$M\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{h}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(0; \frac{3a\sqrt{2}}{4}; -\frac{h}{2}\right), \overrightarrow{BD} = (a\sqrt{2}; 0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow MN \perp BD$$

$$\overrightarrow{AC} = (0; a\sqrt{2}; 0), \overrightarrow{AN} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{3a\sqrt{2}}{4}; 0\right) \Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}] = \left(\frac{ah\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{a^2h}{4}. \text{ Vậy } d(MN, AC) = \frac{[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AN}}{[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}]} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

6. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Tọa độ các đỉnh:

$$A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; a; 0), C(a; a; 0), M\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), N\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{DM} = \left(\frac{a}{2}; -a; 0\right) \Rightarrow$ phương trình

$$DM : \begin{cases} x = t \\ y = a - 2t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow H(t; a - 2t; 0)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CH} = (t - a; -2t; 0), \overrightarrow{CN} = \left(-a; -\frac{a}{2}; 0\right)$$

Vì

$$H \in CN \Rightarrow \frac{t - a}{-a} = \frac{-2t}{-\frac{a}{2}} \Leftrightarrow -t + a = 4t \Rightarrow t = \frac{a}{5} \Rightarrow H\left(\frac{a}{5}; \frac{3a}{5}; 0\right) \Rightarrow S\left(\frac{a}{5}; \frac{3a}{5}; a\sqrt{3}\right)$$

$$\text{Vì } S_{CDNM} = S_{ABCD} - S_{\Delta AMN} - S_{\Delta BCM} = a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

Nên thể tích khối chóp $S.CDNM$:

$$V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{CDNM} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot \frac{5a^2}{8} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Ta có:

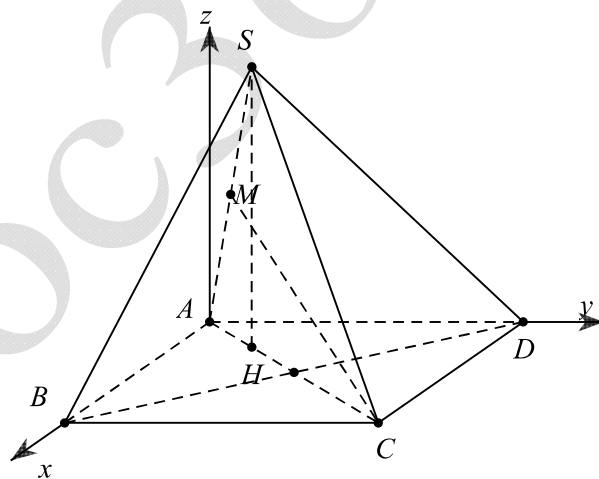
$$\overrightarrow{SC} = \left(\frac{4a}{5}; \frac{2a}{5}; -a\sqrt{3} \right), \overrightarrow{DC} = (a; 0; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}] = \left(a^2\sqrt{3}; \frac{a^2\sqrt{3}}{2}; a^2 \right)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}] \cdot \overrightarrow{DC} = a^3\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } d(SC, DM) = \frac{[\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}] \cdot \overrightarrow{DC}}{[\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}]} = \frac{a^3\sqrt{3}}{\frac{a^2\sqrt{19}}{2}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

$$7. \text{ Ta có } AH = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$

Chọn hệ trục như hình vẽ



Tọa độ các điểm

$$A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; a; 0), C(a; a; 0), H\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{4}; 0\right), S\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{14}}{4}\right)$$