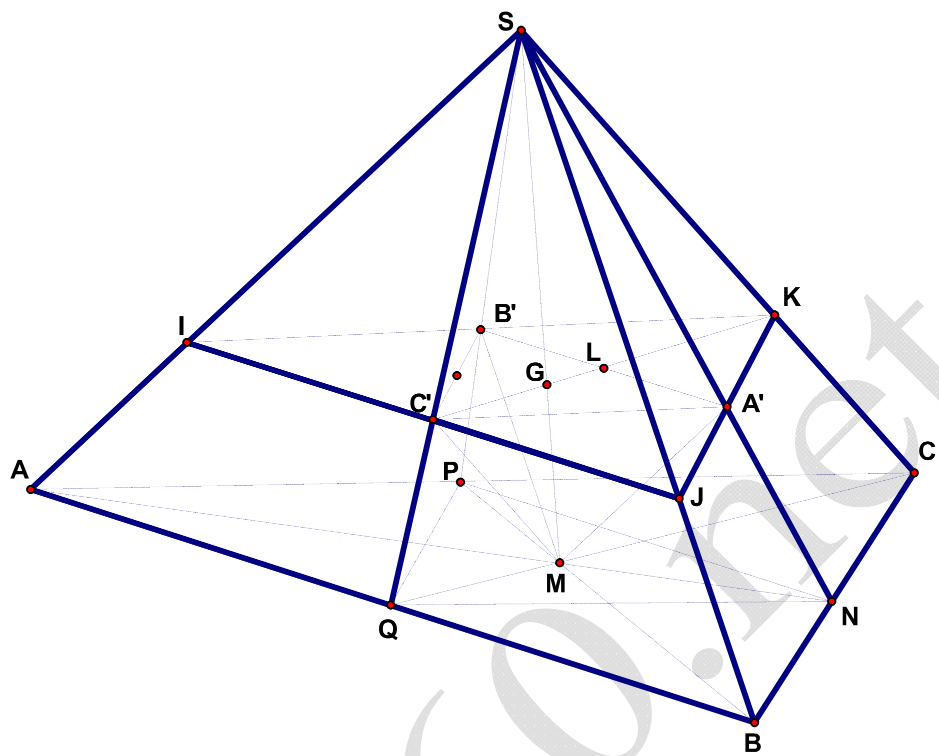

1. Cách dựng các điêm A',B',C'.

Gọi N là giao điểm của MA với BC, P là giao điểm của MB với AC, Q là giao điểm của MC với AB. Ta có ba điểm S,A',N là ba điểm chung của mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng α xác định bởi hai đường thẳng song song $SA, A'M$ nên chúng thẳng hàng, từ đó suy ra cách dựng A' như sau.

- Dựng N là giao điểm của MA với BC.
- Dựng A' là giao điểm của SN và đường thẳng đi qua M và song song với SA.

Tương tự B' là giao điểm của SP và đường thẳng đi qua M song song với SB; C' là giao điểm của SQ và đường thẳng đi qua M song song với SC.

2. Tập hợp các điêm G.

Ta có: $\begin{cases} MB' /\!/ SB \\ MC' /\!/ SC \end{cases} \Rightarrow (MB'C') /\!/ (SBC)$

Mặt khác $\begin{cases} (A'B'C') \cap (MB'C') = B'C' \\ A' \in (A'B'C') \cap (SBC) \end{cases}$

Do đó giao tuyến của mặt phẳng $(A'B'C')$ và mặt phẳng (SBC) là đường thẳng đi qua A', song song với đường thẳng $B'C'$ và cắt SB,SC lần lượt tại J và K.

Giao tuyến của mp $(A'B'C')$ với mặt phẳng (SAB) là đường thẳng $JC' // A'B'$ và cắt SA tại I.
Giao tuyến của $mp(A'B'C')$ với mặt phẳng (SCA) là đường thẳng $KI // A'C'$.
Tứ giác $A'KB'C'$ có $A'K // B'C', KB' // A'C'$ nên là hình bình hành do đó hai đường chéo $C'K$ và $A'B'$ cắt nhau tại trung điểm K của chúng .Từ đó suy ra trọng tâm G của tam giác $A'B'C'$ thuộc $C'K$.
Chứng minh tương tự G cũng thuộc $B'J$.
Ba điểm S,G,M là ba điểm chung của hai mặt phẳng (SBP) và (SCQ) nên chúng thẳng hàng.
Vì $MC' // SC$ nên ta có: $\dfrac{GM}{GS}=\dfrac{GC'}{GK}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{SG}{SM}=\dfrac{2}{3}$.
Suy ra G là ảnh của M qua phép vị tự tâm S, tỉ số $\dfrac{2}{3}$, vì tập hợp các điểm M là miền trong của tam giác ABC nên tập hợp các điểm G là miền trong của tam giác $A_1B_1C_1$ là ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm S, tỉ số $\dfrac{2}{3}$.

Bài 7

1. O là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, tức là điểm thỏa hệ thức : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{O}$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$. Lại có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}$ (giả thiết), suy ra
$\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MO}$ **.** Điều đó chứng tỏ rằng N là điểm đối xứng của M qua O, vì tập hợp M là mặt phẳng (P) nên tập hợp N là mặt phẳng (P') đối xứng của (P) qua O.

2. Gọi K là hình chiếu vuông góc của S lên MB. Vì

$$\begin{cases}BC\perp SA\\BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow(MBC)\perp(SAB).$$

$$\begin{cases}(MBC)\cap(SAB)=MB,\ (MBC)\perp(SAB)\\SK\subset(SAB),SK\perp MB\end{cases}\Rightarrow SK\perp(MBC)\Rightarrow K=hcM/_{(MBC)}$$

Trong mặt phẳng (SAB), $SKB=90^0$, suy ra K thuộc đường tròn (C) đường kính SB chứa trong mặt phẳng (SAB).
Mặt khác vì M chỉ di động trên cạnh SA nên K chỉ di động trên cung nhỏ SA của đường tròn (C), gọi cung này là (L). Suy ra tập hợp K là cung (L).

Qua phép đối xứng trục $SA: S \to S$, $K \to H \in (P)$, do đó $SK \to SH$ và vì $SK \perp (MBC)$, (P) là ảnh của mặt phẳng (MBC) qua phép đối xứng trục SA nên $SH \perp (P)$ tức là H là hình chiếu vuông góc của S lên (P). Lại có tập hợp các điểm K là cung (L), suy ra tập hợp các điểm H là ảnh của (L) qua phép đối xứng trục SA.

3. Gọi I là giao điểm của DM và CN, dễ thấy I là điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) nên I thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng này (d là đường thẳng qua S và song song với AD, BC).

Mặt khác vì M chỉ di động trên cạnh SA nên I chỉ di động trên tia Sx nằm trên d và cùng chiều với $\overrightarrow{DA}$ .Vậy tập hợp các điểm I là tia Sx.

Phép đối xứng qua mặt phẳng (SCD) biến :

$$\begin{cases} D \to D, M \to M' \\ C \to C, N \to N' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DM \to DM' \\ CN \to CN' \end{cases} \to I = DM \cap CN \to E = DM' \cap CN'.$$

Suy ra tập hợp E là ảnh của tia SX qua phép đối xứng qua mặt phẳng (SCD).

4. a.Tập hợp các điểm M'

Dựng đường thẳng qua A' song song với OO', cắt d_1 tại K. Vì $MM' // OO'$ nên $MM' // A'K$, lại có $M \in AA'$ do đó MM' chứa trong mặt phẳng $(AA'K)$ và M' thuộc AK, mặt khác $\overrightarrow{MA'} = k\overrightarrow{MA}$ nên ta có: $\overrightarrow{M'K} = k\overrightarrow{M'A}$.

Mặt phẳng $(AA'K)$ song song với mặt phẳng (P) (vì chứa hai đường thẳng cắt nhau $A'K, AA'$ song song với (P)) Do đó mặt phẳng (Q) cắt hai mặt phẳng trên theo hai giao tuyến song song : $AK // Ox$.

Trong góc (d, d_1), đường thẳng AK song song với đường thẳng cố định Ox và điểm M' chia đoạn AK theo một tỉ số không đổi . Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng (D) vẽ từ O và qua một vị trí đặc biệt của M'.

b.Tập hợp các điểm M.

Ta có

$\begin{cases}\overrightarrow{MA'}=k\overrightarrow{MA}\\ \overrightarrow{M'K}=k\overrightarrow{M'A}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA'}=k\overrightarrow{MA}\\ \overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AK}=k\overrightarrow{M'A}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AK}=k\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{M'A}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{KA'}=k\overrightarrow{MM'}\Rightarrow(1-k)\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{A'K}\Rightarrow\overrightarrow{M'M}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{KA'}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{OO'}$

$\left(\text{do}\,\overrightarrow{KA'}=\overrightarrow{OO'}\right)$. Vậy M là ảnh của M' qua phép tịnh tiến $\frac{1}{1-k}\overrightarrow{OO'}$. Suy ra tập hợp các điểm M là ảnh của đường thẳng (D) qua phép tịnh tiến $\frac{1}{1-k}\overrightarrow{OO'}$.

5. a.Tập hợp các điểm A',B',C'.

Gọi A_1,B_1,C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B,C trên (P).Khi đó AA_1,BB_1,CC_1 và theo giả thiết thì $AA'\,/\!/\,BB'\,/\!/\,CC'$ nên ba mặt phẳng $(AA_1A'),(BB_1B'),(CC_1C')$ song song với nhau, do đó chúng cắt mặt phẳng (P) theo ba giao tuyến song song A_1A',B_1B',C_1C'. Từ đó suy ra ba tam giác vuông AA_1A',BB_1B',CC_1C' đồng dạng. Ta có:

$\frac{AA'}{AA_1}=\frac{BB'}{BB_1}=\frac{CC'}{CC_1}=\frac{AA'+BB'+CC'}{AA_1+BB_1+CC_1}$.

Vì ba điểm A,B,C cố định nên AA_1,BB_1,CC_1 là ba đoạn thẳng có độ dài không đổi. Đặt $AA_1+BB_1+CC_1=h\,(h>k)$.

Lại có $AA'+BB'+CC'=k$

Suy ra $AA'=AA_1.\frac{h}{k}$, $BB'=BB_1.\frac{h}{k}$, $CC'=CC_1.\frac{h}{k}$.

Trong tam giác vuông AA_1A',

$$A_1A'=\sqrt{AA'^2-AA_1{}^2}=\sqrt{AA_1^2\left(\frac{k^2}{h^2}-1\right)}=AA_1\sqrt{\frac{k^2}{h^2}-1}$$

Tương tự $B_1B'=BB_1\sqrt{\frac{k^2}{h^2}-1}$, $C_1C'=CC_1\sqrt{\frac{k^2}{h^2}-1}$.

Vậy tập hợp các điểm A',B',C' lần lượt là các đường tròn tâm A_1,B_1,C_1; bán kính $AA_1\sqrt{\frac{k^2}{h^2}-1}$, $BB_1\sqrt{\frac{k^2}{h^2}-1}$, $CC_1\sqrt{\frac{k^2}{h^2}-1}$ chứa trong mặt phẳng (P).

b.Tập hợp trọng tâm G' .

Gọi M, M' theo thứ tự là trung điểm của BC và $B'C'$ thì $MM' /\!/ BB' /\!/ CC'$ do đó $MM' /\!/ AA'$. Trong mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng song song AA', MM', hai đường thẳng AM và $A'M'$ cắt nhau tại I. Khi đó I cũng là giao điểm của AM với (P) nên I cố định. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có :

$$\frac{GM}{GA}=\frac{G'M'}{G'A'}=\frac{1}{2}\Rightarrow GG' /\!/ AA' \Rightarrow \frac{IG'}{IA'}=\frac{IG}{IA}=t \text{ (hằng số)} \Rightarrow \overrightarrow{IG'}=t.\overrightarrow{IA'}$$

Suy ra G' là ảnh của A' qua phép vị tự tâm I, tỉ số t.

Vì tập hợp các điểm A' là đường tròn (a) tâm A_1, bán kính $AA_1\sqrt{\frac{k^2}{h^2}-1}$ chứa trong (P) nên tập hợp các điểm G' là đường tròn ảnh của đường tròn (a) qua phép vị tự tâm I, tỉ số t.

Vấn đề 2. PHÂN CHIA – LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN CHỨNG MINH HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU, CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐA DIỆN ĐỀU

Bài 1

1. Ta phân chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành ba khối tứ diện $C'ABC,\ ABA'C',\ BA'B'C'$.