$$\Rightarrow SB = a\sqrt{\left(1+\frac{\cot^2\beta}{\sin^2\alpha}\right)} = \frac{a}{\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha+\cot^2\beta}.$$

Từ (*) $\Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{\dfrac{a\cot\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.}{\dfrac{a}{\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha+\cot^2\beta}} = \dfrac{\cot\beta.\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cot^2\beta}}.$

Bài 4 Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC,BA. $H = AM \cap CN$.

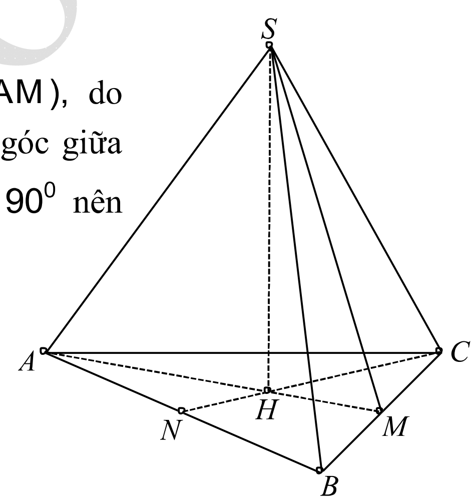
1. Diện tích đáy của khối chóp $S.ABC$ là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a.a.\sin 60^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vì H cũng là trọng tâm của tam giác ABC nên $HA = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $SH^2 = SA^2 - AH^2 = b^2 - \dfrac{a^2}{3} \Rightarrow h = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2-a^2}$.

Thể tích của khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}$.

2. Diện tích đáy $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



Vì $SH \perp BC, AM \perp BC$ nên $BC \perp (SAM)$, do đó góc giữa mặt (SBC) và mặt đáy là góc giữa hai đường thẳng MA, MS. Do $SHM = 90^0$ nên $\alpha = (MA, MS) = SMA$.

Ta có $HM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$,

nên $SH = HM.\tan\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\tan\alpha$.

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{a^3\tan\alpha}{8}$.

3. Đặt $AB = x$. Xét tam giác vuông SAN ta có $SN = AN.\cot\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{x}{2}.\cot\dfrac{\beta}{2}$.

Trong tam giác vuông SHN : $SN^2 = SH^2 + HN^2$, nên

$$\frac{x^2}{4}.\cot^2\frac{\beta}{2}=h^2+\left(\frac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2 \Rightarrow x=\frac{2\sqrt{3}.h}{\sqrt{3\cot^2\frac{\beta}{2}-1}}.$$

Diện tích đáy $S_{ABC}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}.h^2}{3\cot^2\frac{\beta}{2}-1}$.

Thể tích khối chóp là $V=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}.h^3}{3\cot^2\frac{\beta}{2}-1}$.

4. Vì hình chiếu của S lên mặt đáy là H nên góc giữa cạnh bên và mặt đáy là $\varphi=SAH$. Trung đoạn của hình chóp là $SM=d$. Đặt $SH=h$.

Ta có $AH=SH.\cot\varphi=h.\cot\varphi\Rightarrow HM=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}h.\cot\varphi$.

Tam giác SHM vuông tại H nên $SM^2=SH^2+HM^2$, hay

$$h^2+\frac{1}{4}h^2\cot^2\varphi=d^2\Rightarrow h=\frac{2d}{\sqrt{4+\cot^2\varphi}}.$$

Suy ra $AH=\frac{2d\cot\varphi}{\sqrt{4+\cot^2\varphi}}=\frac{AB\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AB=\frac{4d\cot\varphi}{\sqrt{3(4+\cot^2\varphi)}}$, nên diện tích đáy của khối chóp $S_{ABC}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4\sqrt{3}d^2\cot^2\varphi}{3(4+\cot^2\varphi)}$.

Thể tích của khối chóp là $V=\frac{1}{3}h.S_{ABC}=\frac{16d^3\cot^3\varphi}{9\sqrt{(4+\cot^2\varphi)^3}}$.

Bài 5

1. Gọi M là trung điểm của BC. Vì các tam giác SBC, ABC là tam giác đều nên

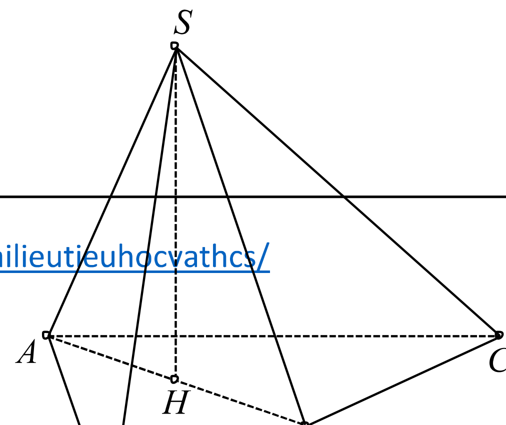
$SM\perp BC, AM\perp BC\Rightarrow SMA=(SBC),(ABC)=60^0$.

Ta có $SM=AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác SAM là tam giác đều.

Gọi H là trung điểm cạnh $AM\Rightarrow SH\perp AM$ mà $BC\perp SH$ nên SH là đường cao của khối chóp, nhưng SH cũng là đường cao của tam giác đều SAM nên $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{SABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{16}a^3.$$



Mặt khác, tam giác SAC có

$$CS = CA = a, SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra diện tích của tam giác SAC là

$$S_{ACS} = \frac{1}{2}SA.\sqrt{SC^2 - \frac{SA^2}{4}} = \frac{\sqrt{39}}{16}a^2.$$

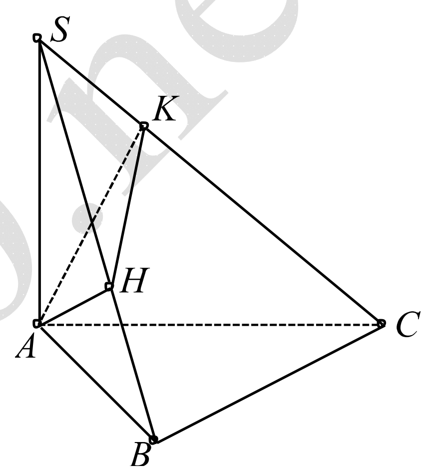
Vậy khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) là:

$$d(B,(SAC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{ACS}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}a.$$

2. Vì $BC \perp (SAB)$ nên $AH \perp BC$

$AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HK, AH \perp SC$

mà $AK \perp SC \Rightarrow SC \perp (AHK)$.



Vậy $V_{SAHK} = \frac{1}{6}SK.HA.HK.$

Ta có $AH = \frac{AB.SA}{SB} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$

$$AK = \frac{AC.SA}{SC} = \frac{2\sqrt{5}a}{3},$$

$$HK = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \frac{8a}{3\sqrt{5}}, SK = \frac{4a}{3}$$

$$\Rightarrow V_{SAHK} = \frac{1}{6}.\frac{4a}{3}.\frac{2a}{\sqrt{5}}.\frac{8a}{3\sqrt{5}} = \frac{32}{135}a^3.$$

Mặt khác $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}a$ nên $S_{AHS} = \frac{4}{5}a^2.$

Vậy khoảng cách cần tìm là: $d(K,(SAB)) = \frac{3V_{KSAH}}{S_{AHS}} = \frac{8}{9}a.$

3. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Gọi M, N là trung điểm của BC, BA. H, K là hình chiếu của S, C' xuống mặt phẳng (ABC). $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SH = \frac{a\sqrt{15}}{6}$

và thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{24}.$

Tam giác $C'AB$ cân tại C' và $C'N = \sqrt{C'K^2 + KN^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}a$

nên ta có $S_{ABC'} = \frac{\sqrt{7}}{8}a^2$. Vì thế $d(C,(C'AB)) = \frac{3V_{C.C'AB}}{S_{C'AB}} = \frac{3V}{2S_{C'AB}}$

hay khoảng cách cần tìm là $d(C,(C'AB)) = \frac{a\sqrt{35}}{14}$.

Bài 6

1. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Rõ ràng $(SHM) \perp AB$ nên $SMH = 60^0$.

Ta có $MH = \frac{a}{4}$ nên $SH = MH.\tan 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{4}a$.

$S_{ACN} = \frac{1}{2}AD.CN = \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow V_{SANC} = \frac{1}{3}SH.S_{ACN} = \frac{\sqrt{3}}{48}a^3$.

Hạ $HK \perp AC \Rightarrow SK \perp AC$.

Tam giác OHK vuông cân tại K nên $HK = \frac{HO}{\sqrt{2}} = \frac{a}{4\sqrt{2}}$

$\Rightarrow SK = \frac{\sqrt{14}}{8}a, S_{ACS} = \frac{\sqrt{7}}{8}a^2$. Ta có $d(N,(SAC)) = \frac{3V_{NACS}}{S_{ACS}}$

nên $d(N,(SAC)) = \frac{\sqrt{21}}{14}a$.

2. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Vì M là trung điểm của SC

nên $OM // SA, MS = MC$ do đó:

$$d(SA,BM) = d(SA,(OBM)) = d(S,(OBM)) = d(C,(OBM)) = \frac{3V_{C.OMB}}{S_{OMB}}.$$

Ta có $OC = \frac{1}{2}AC = 2a$ nên $OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = a$

$\Rightarrow S_{OBC} = \frac{1}{2}OB.OC = a^2$.

Gọi N là trung điểm của OC thì $MN // SO$ nên $MN \perp (OBC)$ và

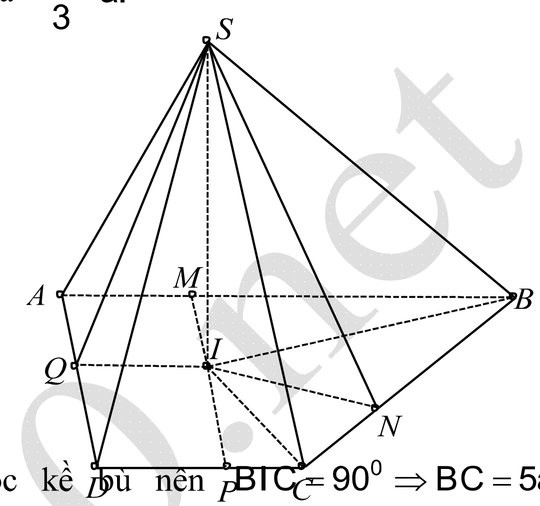
$MN = \frac{1}{2}SO = a\sqrt{2}$. Do đó $V_{M.OBC} = \frac{1}{3}.MN.S_{OBC} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

Ta có $SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=2\sqrt{3}a$ nên $OM=\sqrt{3}.a.$
Tam giác OMB vuông tại O nên

$$S_{OMB}=\frac{1}{2}.OB.OM=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\Rightarrow d(SA,BM)=\frac{3V_{C.OMB}}{S_{OMB}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}a.$$

Vậy khoảng cách giữa SA và BM là $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a.$

3.



Vì các mặt bên nghiêng trên đáy một góc φ và chân đường cao I nằm trong hình thang $ABCD$ nên I là tâm đường tròn nội tiếp hình thang. Gọi tiếp điểm của nó với các cạnh là M,N,P,Q (hình vẽ). Ta cũng có

$\widehat{SNI}=\varphi$

nên $SI=IN.\tan\varphi=r.\tan\varphi.$

IB,IC là phân giác của hai góc kề bù nên $\widehat{BIC}=90^0\Rightarrow BC=5a,$

$IN=\dfrac{12a}{5},BN=\dfrac{IB^2}{BC}=\dfrac{16a}{5}$ và $CN=\dfrac{9a}{5}.$

Từ các hình vuông $AMIQ,\ QIPD$ ta có $AD=2r=\dfrac{24}{5}a,$

$$AB=\frac{28a}{5},DC=\frac{21a}{5}\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{588a^2}{25}\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{2352a^3}{125}\tan\varphi.$$

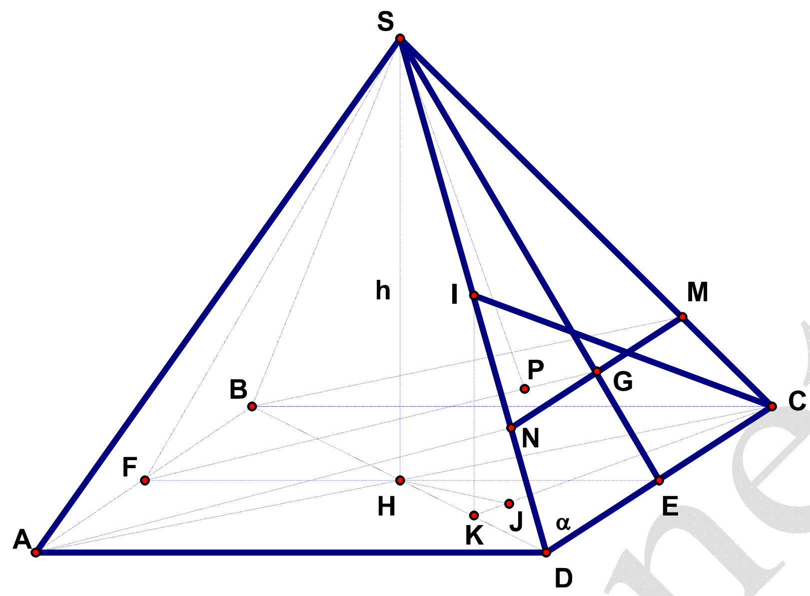
Mà $S_{ACD}=\dfrac{252a^2}{25}$ nên $S_{ACB}=S_{ABCD}-S_{ACD}=\dfrac{336}{25}a^2,$ do đó

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ACB}=\frac{1344}{125}a^3.\tan\varphi.$$

Theo công thức hình chiếu $S_{BCS}=\dfrac{S_{BCI}}{\cos\varphi}=\dfrac{6a^2}{\cos\varphi}$ nên

$$d(A,(SBC))=\frac{3V_{A.SBC}}{S_{BCS}}=\frac{672a.\sin\varphi}{125}.$$

Bài 8



1. Tính $S_{xq}, V_{S.ABCD}$

.Đặt cạnh của hình vuông $ABCD$ là $x, x > 0$ và gọi E là trung điểm của cạnh CD. Khi đó

Trong tam giác vuông SEC, $SE = DE.\tan SCD = \frac{x}{2}\tan\alpha$ (1).

Trong tam giác vuông SHE, $SE^2 = SH^2 + HE^2 = h^2 + \frac{x^2}{4}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x^2}{4}\tan^2\alpha = h^2 + \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}\left(\tan^2\alpha - 1\right) = h^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4h^2}{\tan^2\alpha - 1} \Leftrightarrow x = \frac{2h}{\sqrt{\tan^2\alpha - 1}}$.

Diện tích xung quanh của hình chóp $S.ABCD$.

$S_{xq} = 4S_{SCD} = 2CD.SE = 2x.\frac{x}{2}\tan\alpha = x^2\tan\alpha = \frac{4h^2\tan\alpha}{\tan^2\alpha - 1}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$: $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}x^2h = \frac{4h^3}{3\left(\tan^2\alpha - 1\right)}$.

Bài toán có nghĩa $\Leftrightarrow \tan^2\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \tan\alpha > 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. Tính $d\left(SH, CI\right)$**.**

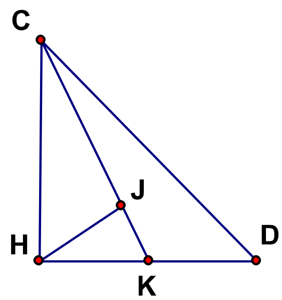
Gọi K là trung điểm của HD, ta có IK là đường trung bình trong tam giác SHD

$\Rightarrow IK // SH \Rightarrow (CIK) // SH \Rightarrow d(SH, CI) = d(SH, (CIK)) = d(H, (CIK))$.

Dựng $HJ \perp CK$, $(J \in CK)$, khi đó

$$\begin{cases} HJ \perp CK \\ HJ \perp IK \ (\text{do } IK // SH \Rightarrow IK \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow HJ \perp (CIK).$$

$\Rightarrow HJ = d(H, (CIK)) = d(SH, CI)$.



Trong tam giác vuông CHK,

$$CK^2 = CH^2 + HK^2 = \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{8} = \frac{5x^2}{8}$$

$$\Rightarrow CK = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$HJ.CK = CH.HK$

$$\Rightarrow HJ = \frac{CH.HK}{CK} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}.\frac{x\sqrt{2}}{4}}{\frac{x\sqrt{10}}{4}} = \frac{x}{\sqrt{10}} = \frac{h\sqrt{10}}{5\sqrt{(\tan^2\alpha - 1)}}.$$

Vậy $d(SH, CI) = \dfrac{h\sqrt{10}}{5\sqrt{(\tan^2\alpha - 1)}}$.

3. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (MAB)**.**

$$\begin{cases} M \in (MAB) \cap (CSD) \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow (MAB) \cap (SCD) = MN // CD // AB \ (N \in SD).$$

Vậy thiết diện của (MAB) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang $ABNM$.

Gọi G là giao điểm của MN và SE, F là trung điểm của cạnh AB, theo tính chất của hình vuông, ta có $EF \perp AB$ và H là trung điểm của EF.

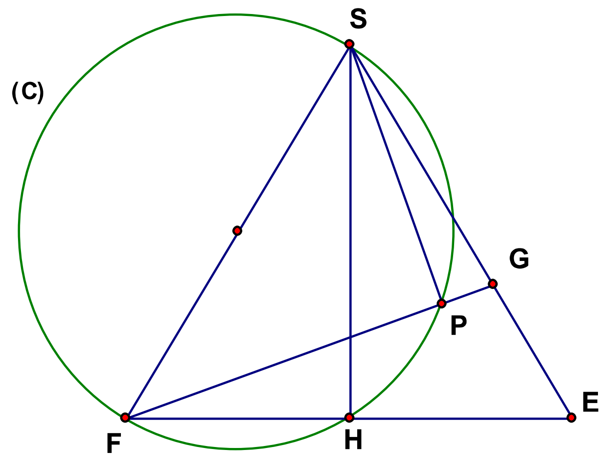
Dựng SP vuông góc với $FG (P \in FG)$, ta có

$$\begin{cases} AB \perp EF \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SEF) \Rightarrow AB \perp SP.$$

$$\begin{cases} SP \perp AB \\ SP \perp FG \end{cases} \Rightarrow SP \perp (MAB).$$

$\Rightarrow P$ là hình chiếu vuông góc của S lên (MAB).

Trong mặt phẳng (SEF), $SPF = 90^0$ nên P thuộc đường tròn (C) đường kính SF chứa trong mặt phẳng (SEF).

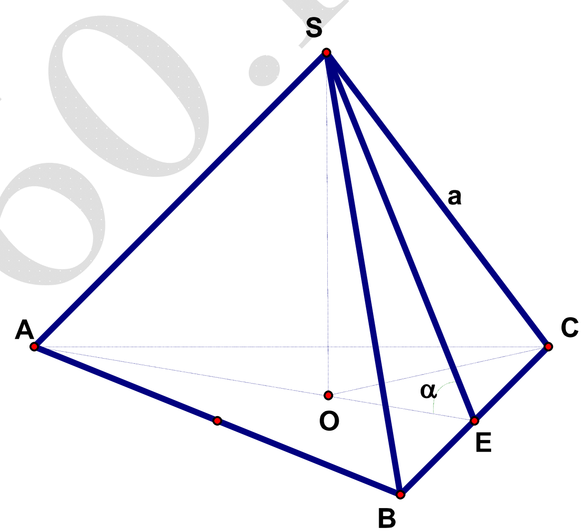


Giới hạn .
Khi M di động trên đoạn SC thì G di động trên đoạn SE.
P là giao điểm thứ hai của FG với (C) do đó
Khi $G \equiv S$ thì $P \equiv S$.
Khi $G \equiv E$ thì $P \equiv H$.
Khi G đi động trên đoạn SE thì P di động trên cung nhỏ SH của (C).
Vậy tập hợp của P là cung nhỏ của đường tròn (C).

Bài 9

1. Thể tích khối chóp $S.ABC$**.**

Gọi E là trung điểm của cạnh BC và O là tâm của đáy ABC. Theo tính chất của hình chóp đều , ta có $SO \perp (ABC), SE \perp BC, OE \perp BC$, suy ra SO là đường cao của hình chóp và $((SBC),(ABC)) = SEO = \alpha$.



Gọi cạnh của đáy ABC là $x(x>0)$ .Khi đó

$$OE = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3}\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{6},$$

$$OC = \frac{2}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

Trong tam giác vuông SOE (vuông tại O), $SO = OE.\tan\alpha = \frac{x\sqrt{3}}{6}\tan\alpha$ (1) .

Trong tam giác vuông SOC (vuông tại O),

$$SO^2 = SC^2 - OC^2 = a^2 - \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{x^2}{3} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ,ta có : $\frac{x^2}{12}\tan^2\alpha = a^2 - \frac{x^2}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{12}\left(\tan^2\alpha + 4\right) = a^2$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{12a^2}{\tan^2\alpha + 4} \Rightarrow x = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{\tan^2\alpha + 4}}$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$: $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SO = \frac{1}{3}.\frac{x^2\sqrt{3}}{4}.\frac{x\sqrt{3}}{6}.\tan\alpha = \frac{x^3.\tan\alpha}{24}$

$$= \frac{24\sqrt{3}.a^3\tan\alpha}{24\sqrt{\left(\tan^2\alpha + 4\right)^3}} = \frac{a^3\sqrt{3}\tan\alpha}{\sqrt{\left(\tan^2\alpha + 4\right)^3}}$$

2. **Xác định α để V đạt giá trị lớn nhất.**

V đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{\tan\alpha}{\sqrt{\left(\tan^2\alpha + 4\right)^3}}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{\tan^2\alpha}{\left(\tan^2\alpha + 4\right)^3}$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $f(\alpha) = \frac{\tan^2\alpha}{\left(\tan^2\alpha + 4\right)^3} = \frac{1}{4}.\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha + 4}.\frac{2}{\tan^2\alpha + 4}.\frac{2}{\tan^2\alpha + 4}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương

$\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha + 2}, \frac{2}{\tan^2\alpha + 2}, \frac{2}{\tan^2\alpha + 2}$, ta được

$$f(\alpha) \overset{\text{Cauchy}}{\le} \frac{1}{4}.\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha + 4} + \frac{2}{\tan^2\alpha + 4} + \frac{2}{\tan^2\alpha + 4}\right)\right]^3 = \frac{1}{108}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha + 2} = \frac{2}{\tan^2\alpha + 2} \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 2 \Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = \arctan 2$.

Vậy $\max V = \frac{a^3\sqrt{3}}{\sqrt{108}} = \frac{a^3}{6}$ đạt được khi và chỉ khi $\alpha = \arctan 2$.

3. **Xác định α để hình chóp $S.ABC$ trở thành tứ diện đều.**

Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ là tứ diện đều $\Leftrightarrow$ cạnh bên bằng cạnh đáy $\Leftrightarrow a = x \Leftrightarrow a = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{\tan^2\alpha + 4}} \Leftrightarrow \tan^2\alpha + 4 = 12 \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 8 \Leftrightarrow \tan\alpha = 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \alpha = \arctan\left(2\sqrt{2}\right)$

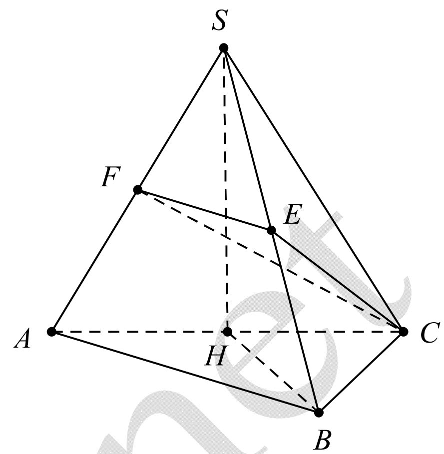
Bài 10

1. • Tính $V_{S.ABC}$

Ta có: $AB = a, BC = a\sqrt{2}$ và

$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos ASC = 2a^2 + a^2 = 3a^2$

Suy ra ΔABC vuông tại B. Gọi H là trung điểm BC, ta có H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mà $SA = SB = SC \Rightarrow SH \perp (ABC)$



$SH = \sqrt{SA^2 - \dfrac{AC^2}{4}} = \dfrac{a}{2}$,

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$ nên ta có:

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a}{2}\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

- Tính $\alpha = (AB, CE)$ và $d(AB, CE)$

Gọi F là trung điểm của SA, suy ra $EF // AB \Rightarrow (AB, CE) = (EF, CE)$

$AB // (CEF) \Rightarrow d(AB, CE) = d(AB, (CEF)) = d(A, (CEF)) = h$

Ta có: $EF = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$,

$CE = \sqrt{SC^2 - \dfrac{SB^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, CF = \sqrt{\dfrac{2(CS^2 + CA^2) - SA^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

Suy ra $\cos CEF = \dfrac{CE^2 + CF^2 - EF^2}{2CE.CF} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{7a^2}{4}}{2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{7}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

Do đó $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{14} \Rightarrow \alpha \approx 71^0$

Ta có: $V_{S.CEF} = \dfrac{1}{4}V_{SABC} \Rightarrow V_{CABEF} = \dfrac{3}{4}V_{S.ABC}$

Mặt khác $S_{\Delta AFB} = 2S_{\Delta BFE} \Rightarrow V_{B.CEF} = \dfrac{1}{3}V_{CABEF} = \dfrac{1}{4}V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}$