Vậy tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.AMN$ và $S.ABC$ không phụ thuộc vào độ lớn của góc α.

b) Mặt phẳng (AMN) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau, tức là $\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \dfrac{1}{2}$, do đó $\dfrac{a^4}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} = \dfrac{1}{2}$. Hay

$$2a^4 = (a^2+b^2)(a^2+c^2) \Leftrightarrow a^4 - (b^2+c^2)a^2 - b^2c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{b^2+c^2 \pm \sqrt{(b^2+c^2)^2 + 4b^2c^2}}{2}$$

Vì $a > 0, a^2 > 0$ nên $a = \sqrt{\dfrac{b^2+c^2+\sqrt{(b^2+c^2)^2+4b^2c^2}}{2}}$.

c) Diện tích ΔABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin BAC = \dfrac{1}{2}bc.\sin\alpha$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{6}abc.\sin\alpha$.

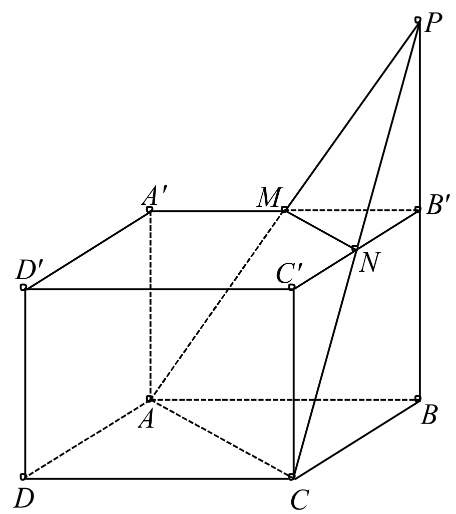
Thể tích khối chóp $S.AMN$ là

$$V_{SAMN} = \frac{a^4}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}.V_{SABC} = \frac{a^5bc.\sin\alpha}{6(a^2+b^2)(a^2+c^2)}.$$

Bài 9

1. Gọi M là trung điểm của $A'B'$.

Mặt phẳng (ACM) chia khối hộp chữ nhật thành hai phần (hình vẽ), phần chứa điểm B' có thể tích V_1 và phần còn lại có thể tích V_2.



Ta có $\dfrac{PB'}{PB} = \dfrac{PN}{PC} = \dfrac{PM}{PA} = \dfrac{MB'}{AB} = \dfrac{1}{2}$.

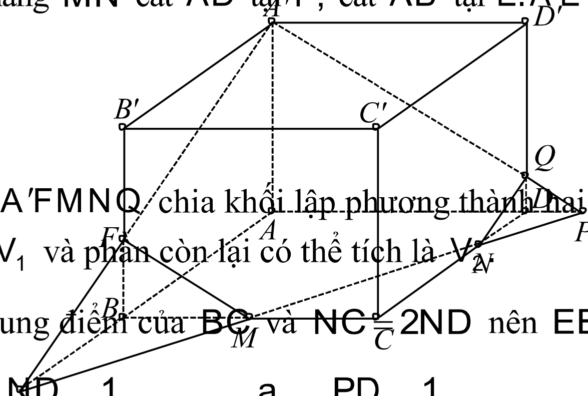
$V_{P.ACB} = \dfrac{1}{3}PB.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}abc.$

$\dfrac{V_{P.MNB'}}{V_{P.ACB}} = \dfrac{PB'}{PB}.\dfrac{PN}{PC}.\dfrac{PM}{PA} = \dfrac{1}{8}$

do đó $V_1 = V_{P.ACB} - V_{P.MNB'} = \left(1 - \dfrac{1}{8}\right).V_{P.ACB} = \dfrac{7}{8}.\dfrac{1}{3}abc = \dfrac{7}{24}abc.$

Vậy $V_1 = \dfrac{7}{24}abc, V_2 = abc - \dfrac{7}{24}abc = \dfrac{17}{24}abc.$

2. Đường thẳng MN cắt AD tại P, cắt AB tại E. $A'E \cap BB' = F$, $A'P \cap DD' = Q$.



Thiết diện $A'FMNQ$ chia khối lập phương thành hai phần, phần chứa điểm A có thể tích là V_1 và phần còn lại có thể tích là V_2.

Vì M là trung điểm của BC và $NC = 2ND$ nên $EB = CN = \dfrac{2a}{3}$ nên $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{2}{5}$;

$$\frac{DP}{MC} = \frac{ND}{NC} = \frac{1}{2} \Rightarrow PD = \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{PD}{PA} = \frac{1}{5}.$$

Ta có $V_{A'.AEP} = \dfrac{1}{3}AA'.S_{AEP} = \dfrac{1}{6}AA'.AE.AP = \dfrac{1}{6}a.\dfrac{5a}{3}.\dfrac{5a}{4} = \dfrac{25}{72}a^3.$

Nhưng $\dfrac{V_{E.FBM}}{V_{E.A'AP}} = \left(\dfrac{EB}{EA}\right)^3 = \dfrac{8}{125}, \dfrac{V_{P.QDN}}{V_{P.A'AE}} = \left(\dfrac{PD}{PA}\right)^3 = \dfrac{1}{125}$ nên suy ra

$$V_1 = V_{E.A'AP} - V_{E.FBM} - V_{P.QDN} = \left(1 - \frac{8}{125} - \frac{1}{125}\right)V_{P.A'AE}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{116}{125}.\frac{25}{72}a^3 = \frac{29}{90}a^3, V_2 = V - V_1 = \frac{61}{90}a^3.$$

3. Thiết diện được dựng như hình vẽ.

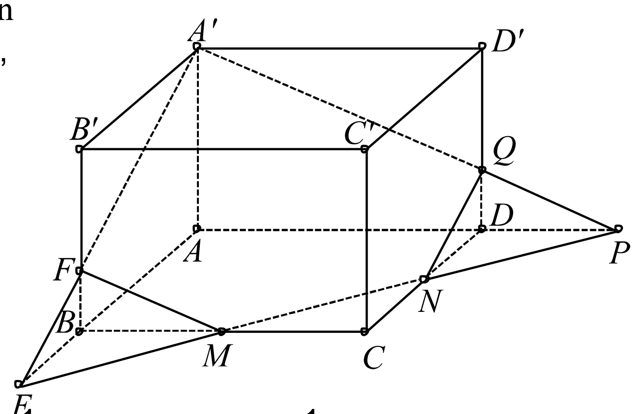
Gọi V là thể tích khối hộp. Khối hộp được chai thành hai phần, phần chứa điểm A có thể tích là V_1, phần còn lại là V_2.

Ta có $V_2 = V - V_1$.

Dễ thấy

$$\frac{EB}{EA} = \frac{EM}{EP} = \frac{EF}{EA'} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{PD}{PA} = \frac{PN}{PE} = \frac{PQ}{PA'} = \frac{1}{3}$$



Nên suy ra $V_{A'AEP} = \dfrac{3}{8}V, V_{EBMF} = \dfrac{1}{27}V_{A'AEP}, V_{PQDN} = \dfrac{1}{27}V_{A'AEP}.$

Do đó $V_1 = V_{A'AEP} - V_{EBMF} - V_{PQDN} = \dfrac{25}{27}V_{A'AEP} = \dfrac{25}{72}V.$

Vậy $V_1 = \dfrac{25}{72}V \Rightarrow V_2 = \dfrac{47}{72}V \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_1} = \dfrac{25}{47}$.

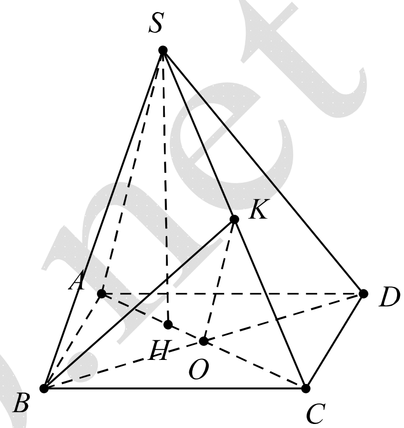
Bài 10

1. Ta có $V_{A.SBC} = \dfrac{1}{3}d(A,(SBC)).S_{BCS}$ nên $d(A,(SBC)) = \dfrac{3V_{A.SBC}}{S_{BCS}}$.

Vì $(SAC) \perp (ABC)$ nên gọi H là hình chiếu của S trên cạnh AC thì $SH \perp (ABC)$, hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AH nên $(SA,(ABCD)) = SAH = \alpha$.

Ta có $ASC = 90^0$ nên

$SA = AC.\cos\alpha = \sqrt{2}.a.\cos\alpha$,



Do đó $SH = SA.\sin\alpha = \sqrt{2}.a.\cos\alpha\sin\alpha$

Nên $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}.a^3.\cos\alpha\sin\alpha$.

Gọi K là trung điểm của SC thì OK là đường trung bình của tam giác SAC nên

$OK // SA \Rightarrow OK \perp SC$. Mà $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ nên $BK \perp SC$.

Ta có $SC = AC.\sin\alpha = \sqrt{2}.a.\sin\alpha$ nên

$$BK = \sqrt{BC^2 - CK^2} = a\sqrt{\frac{2-\sin^2\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow S_{BCS} = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha.\sqrt{2-\sin^2\alpha}.$$

Vậy khoảng cách cần tìm là:

$$d(A,(SBC)) = \frac{3.\dfrac{\sqrt{2}}{6}.a^3.\cos\alpha\sin\alpha.}{\dfrac{1}{2}a^2\sin\alpha.\sqrt{2-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{2}.a.\cos\alpha}{\sqrt{2-\sin^2\alpha}}.$$

2. Vì $CB \perp BA, CB \perp AS$ nên $CB \perp (SAB) \Rightarrow \varphi = CSB$.

Trong tam giác vuông SBC ta có $SB = BC.\cot\varphi = a.\cot\varphi.$

$$SA^2 = SB^2 - AB^2 = a^2(\cot^2\varphi - 1) = \frac{a^2\cos 2\varphi}{\sin^2\varphi} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sin\varphi}.$$

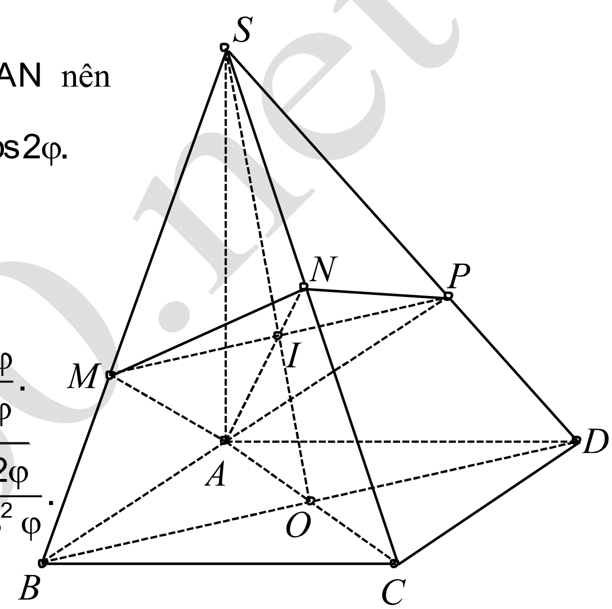
Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{\cos 2\varphi}}{3\sin\varphi}.$

Vì mặt phẳng (SAC) là mặt phẳng đối xứng của khối chóp,

nên $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2V_{S.AMN}}{2V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}.$

Tam giác SAC vuông tại A với đường cao AN nên

$$\frac{SN}{SC} = \frac{SN.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \cos 2\varphi.$$



Vì $SC \perp MA, CB \perp MA$ nên AM là đường cao của tam giác vuông SAB nên

$$\frac{SM}{SB} = \frac{SM.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

$$\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^2\varphi} \Rightarrow V_{S.AMNP} = \frac{a^3.\sqrt{\cos^5 2\varphi}}{3\sin\varphi.\cos^2\varphi}.$$

Bài 11

1. Đường thẳng AM cắt A_1B_1 tại O_1, AN cắt A_1D_1 tại O_2. Đường thẳng O_1O_2 cắt B_1C_1, C_1D_1 lần lượt tai I và K. Mặt phẳng (AMN) cắt hình lập phương theo giao thiết diện là ngũ giác AMIKN.