Ta có: $\cos\alpha = \dfrac{|2a - b + 2(2a+b)|}{3\sqrt{a^2+b^2+(2a+b)^2}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{b^2+12ba+36a^2}{2b^2+4ab+5a^2}}$.

Nếu $a = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

Nếu $a \neq 0$, đặt $t = \dfrac{b}{a}$ thì ta có: $\dfrac{b^2+12ba+36a^2}{2b^2+4ab+5a^2} = \dfrac{t^2+12t+36}{2t^2+4t+5} = f(t)$

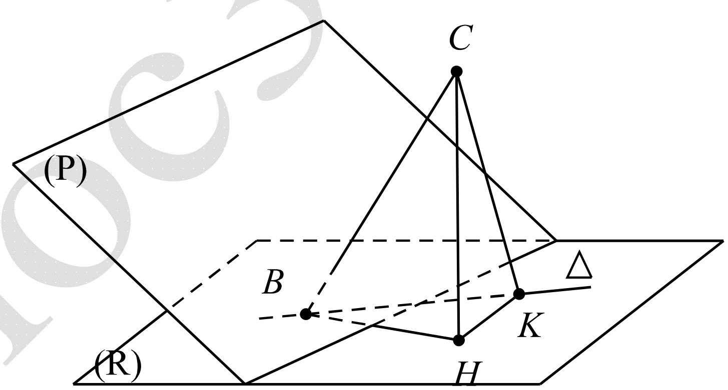
Khảo sát hàm số $f(t)$ ta tìm được $\max f(t) = f(-\dfrac{7}{10}) = \dfrac{53}{6}$

Suy ra $\max\{\cos\alpha\}$ đạt được khi $\dfrac{b}{a} = -\dfrac{7}{10}$, chọn $b = -7 \Rightarrow a = 10$

Vậy phương trình $(R): 10x - 7y + 13z + 3 = 0$.

Cách 2: Gọi d là đường thẳng đi qua B và vuông góc với (P)

Ta có phương trình $d: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = -1+2t \end{cases}$, lấy $C(3;-1;1) \in d,\ C \neq B$



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của C lên (R) và Δ, khi đó $\alpha = BCH$ và

$$\sin\alpha = \sin BCH = \frac{BH}{BC} \geq \frac{BK}{BC}.$$

Mà $\frac{BK}{BC}$ không đổi, nên suy ra α nhỏ nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$ hay (R) là mặt phẳng đi qua Δ và vuông góc với mặt phẳng (BCK).

Mặt phẳng (BCK) đi qua Δ và vuông góc với (P) nên $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{n_P}, \vec{u}\right] = (-1;6;4)$ là VTPT của (BCK).

Do (R) đi qua Δ và vuông góc với (BCK) nên $\overrightarrow{n_R} = \left[\overrightarrow{n_1}, \vec{u}\right] = (10;-7;13)$ là VTPT của (R), suy ra phương trình của (R): $10x - 7y + 13z + 3 = 0$.

3. **Cách 1:** Giả sử phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $ax + by + cz + d = 0$

Do $M, N \in (\alpha)$ nên $\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ -a+2b-c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -\frac{3}{2}b \\ c = -a + \frac{1}{2}b \end{cases}$

Ta viết lại dạng phương trình của (α) như sau: $2ax + 2by + (b-2a)z - 3b = 0$

Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha} = (2a;2b;b-2a)$ là VTPT của (α). Gọi $\varphi = (\Delta, (\alpha))$

Ta có:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\vec{u}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\vec{u}\right|} = \frac{|4a+2b-b+2a|}{\sqrt{6}.\sqrt{4a^2+4b^2+(b-2a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{b^2+12ab+36a^2}{5b^2-4ab+8a^2}}$$

Nếu $a = 0 \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, với $a \neq 0$, đặt $t = \frac{b}{a}, t \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2+12t+36}{5t^2-4t+8}$ ta tìm được $\max f(t) = f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{53}{9}$.

Do đó $\varphi_{max} \Leftrightarrow \sin\varphi_{max} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{5}{8}$, chọn $b = 5, a = 8$

Vậy phương trình của (α): $16x + 10y - 11z - 15 = 0$.

Cách 2: Ta có: $\overrightarrow{NM}=(2;-1;2)$ là VTCP của MN, suy ra phương trình

đường thẳng $MN:\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=1+2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$. Gọi d là đường thẳng đi qua M,

song song với Δ. Suy ra phương trình $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=1+t\\z=1-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

Trên d ta lấy điểm $A(3;2;0)$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A lên (α) và MN, khi đó $\left((\alpha),\Delta\right)=ABH$.

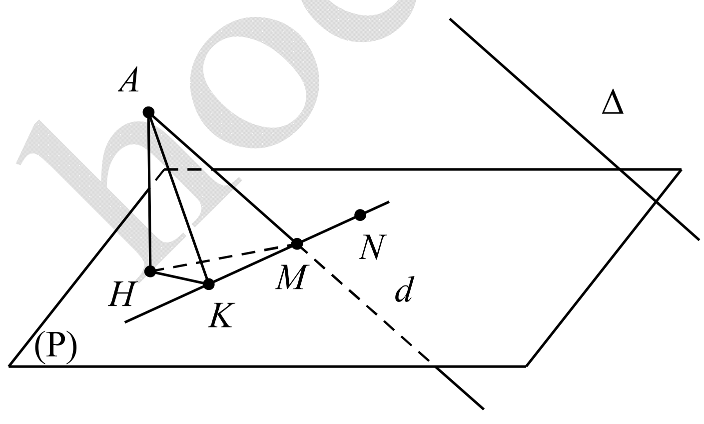
Ta có: $\cos ABH=\frac{BH}{BA}\geq\frac{BK}{BA}$, mà $\frac{BK}{BA}$ không đổi nên ABH lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv K$

Hay (α) là mặt phẳng đi qua MN và vuông góc với mặt phẳng $(\beta)\equiv(MN,d)$

Ta có: $\overrightarrow{n_\beta}=\left[\overrightarrow{NM},\overrightarrow{u}\right]=(-1;6;4)$ là VTPT của (β)

Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{NM},\overrightarrow{n_\beta}\right]=(-16;-10;11)$ là VTPT của (α)

Vậy phương trình của $(\alpha):16x+10y-11z-15=0$.



Ví dụ 8.8 Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-3=0$ và điểm $A(1;2;3)$. Lập phương trình đường thẳng Δ nằm trong (α) và

1. Δ đi qua $M(1;1;1)$ và khoảng cách từ A đến Δ lớn nhất, nhỏ nhất;

2. Δ đi qua M và khoảng cách giữa Δ và $d: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$ lớn nhất.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có $\vec{n}=(1;1;1)$ là VTPT

Gọi $\vec{u}=(a;b;c)$ là VTCP của Δ, do $\Delta\subset(P)\Rightarrow a+b+c=0\Rightarrow c=-a-b$ (1)

1. Ta có: $\overrightarrow{AM}=(0;-1;-2)\Rightarrow\left[\vec{u},\overrightarrow{AM}\right]=(c+2b;2a;-a)$

Do đó: $d(A,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\sqrt{\dfrac{(c+2b)^2+5a^2}{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{\dfrac{(b-a)^2+5a^2}{a^2+b^2+(a+b)^2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{b^2-2ab+6a^2}{b^2+2ab+b^2}}$

Nếu $a=0\Rightarrow d(A,\Delta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, với $a\neq 0$ đặt $t=\dfrac{b}{a}, t\in\mathbb{R}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-2t+6}{t^2+t+1}$, khảo sát hàm số $f(t)$ ta tìm được

$\max f(t)=f(-\dfrac{2}{3})=10,\quad \min f(t)=f(4)=\dfrac{2}{3}$

- Khoảng cách từ A đến Δ lớn nhất khi $t=-\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}=-\dfrac{2}{3}$, chọn $b=-2\Rightarrow a=3,\ c=-1$, suy ra phương trình đường thẳng $:\Delta:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$

- Khoảng cách từ A đến Δ nhỏ nhất khi $t=4\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}=4$, chọn $b=4\Rightarrow a=1,\ c=-5$, suy ra phương trình đường thẳng $:\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.

2. Đường thẳng d đi qua $N(2;0;0)$ và có $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$ là VTCP

$\overrightarrow{MN}=(1;-1;-1)$, $\left[\vec{u},\vec{u_1}\right]=(2a+b;-b;2a-b)\Rightarrow\left[\vec{u},\vec{u_1}\right].\overrightarrow{MN}=3b$

Do đó

$$d(\Delta,d)=\frac{\left|\left[\vec{u},\vec{u_1}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u_1}\right]\right|}=\frac{3|b|}{\sqrt{(2a+b)^2+b^2+(2a-b)^2}}=3\sqrt{\frac{b^2}{4a^2+3b^2}}\le\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=0\Rightarrow c=-b\Rightarrow\vec{u}=b(0;1;-1)$

Vậy phương trình $\Delta:\begin{cases}x=1\\y=1+t\\z=1-t\end{cases}$.

Ví dụ 9.8 Lập phương trình đường thẳng d đi qua $A(0;-1;2)$ và cắt đường thẳng $d':\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ sao cho:

1. Khoảng cách từ $B(2;1;1)$ đến đường thẳng d là lớn nhất, nhỏ nhất;

2. Khoảng cách giữa d và $\Delta:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$ là lớn nhất.

Lời giải.

Giả sử d cắt d' tại điểm M thì $M(-1+2t;\ t;\ 2-t)$, $t\in\mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AM}=(2t-1;\ t+1;\ -t)$ là VTCP của đường thẳng d.

1. Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;\ 2;\ -1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AM}\right]=(1-t;\ 1;\ 4-2t)$.

Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d là

$$d(B,\ d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|}=\sqrt{\frac{5t^2-18t+18}{6t^2-2t+2}}=\sqrt{f(t)}$$

Ta có $f(t)=\dfrac{5t^2-18t+18}{6t^2-2t+2}$ nên $f'(t)=\dfrac{98t(t-2)}{(6t^2-2t+2)^2}$.

Từ đó ta tìm được $\max f(t)=f(0)=18$, $\min f(t)=f(2)=\dfrac{1}{11}$.

Do đó:

- $\min d(B,\ d) = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$ đạt được khi $t = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (3;\ 3;\ -2)$ nên phương trình đường thẳng cần tìm $d:\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{-2}$.

- $\max d(B,\ d) = 3\sqrt{2}$ đạt được khi $t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-1; 1; -1)$ nên phương trình đường thẳng cần tìm $d:\ \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$.

2. Δ đi qua $N(5;\ 0;\ 0)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta} = (2;\ -2;\ 1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{u_\Delta},\ \overrightarrow{AM}\right] = (t-1;\ 4t-1;\ 6t)$, $\overrightarrow{AN} = (5;\ 1;\ -2)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng là:

$$d(\Delta; d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta},\ \overrightarrow{AM}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta},\ \overrightarrow{AM}\right]\right|} = \frac{|-6-3t|}{\sqrt{(t-1)^2+(4t-1)^2+(6t)^2}}$$

$$= 3.\sqrt{\frac{(2+t)^2}{53t^2-10t+2}} = 3.\sqrt{f(t)},\ f(t) = \frac{(2+t)^2}{53t^2-10t+2}.$$

Vì $f'(t) = \dfrac{6(t+2)(4-37t)}{(53t^2-10t+2)^2}$ nên $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2,\ t = \dfrac{4}{37}$.

Từ đó ta tìm được $\max f(t) = f\left(\dfrac{4}{37}\right)$, khi đó $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{1}{37}(29;\ -41;\ 4)$.

Vậy đường thẳng d có phương trình là $d:\ \dfrac{x}{29} = \dfrac{y+1}{-41} = \dfrac{z-2}{4}$.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 1

1. Trong không gian $Oxyz$ cho 2 điểm $A(-1; 3; -2), B(-3; 7; -18)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$.

a) Viết phương trình mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (P).

b) Tìm toạ độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Đề Các vuông góc $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ với $A(2; 3; 2)$, $B(6; -1; -2)$, $C(-1; -4; 3)$, $D(1; 6; -5)$. Tính góc giữa