Có một nguyên lí toán học được phát biểu rất đơn giản nhưng được vận dụng rất linh hoạt và phong phú. Đó là nguyên lí Đi-rich-lê :

"Nếu ta nhốt n con thỏ vào n - 1 chiếc lồng thì tồn tại một lồng có ít nhất hai con thỏ". Sau đây ta sẽ vận dụng nguyên lí để giải bài toán chia hết. Trong các bài toán này cần nắm vững đâu là "thỏ" và cách tạo ra một số "lồng".

Ví dụ 51. Chứng minh rằng trong 101 số nguyên bất kì bao giờ cũng tồn tại hai số mà hiệu của chúng ít nhất cũng tận cùng bằng hai chữ số 0.

Giải

Chia 101 số nguyên này cho 100 (coi 100 này như 100 lồng) ta được 101 số dư (101 số dư này coi là 101 thỏ).

Theo nguyên lí Đi-rich-lê thì ít nhất có hai số dư trùng nhau. Hiệu của hai số có cùng số dư này là một số chia hết cho 100. Do đó hiệu này ít nhất cũng tận cùng bằng hai chữ số 0.

Ví dụ 52. Cho ba số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng tồn tại hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 12.

Giải

Một số nguyên tố lớn hơn 3 phải là một số lẻ không chia hết cho 3. Khi chia số đó cho 12 thì số dư chỉ có thể là một trong bốn số : 1, 5, 7, 11.

Chia 4 loại số dư này thành hai nhóm (hai lồng) : nhóm dư 1 hoặc dư 11 và nhóm dư 5 hoặc dư 7. Đem ba số nguyên tố chia cho 12 ta được ba số dư (coi như là ba thỏ). Có ba số dư mà chỉ chứa trong hai nhóm nên theo nguyên lí Đi-rich-lê tồn tại hai số dư thuộc cùng một nhóm.

- Nếu hai số dư bằng nhau thì hiệu của chúng chia hết cho 12.
- Nếu hai số dư khác nhau thì tổng của chúng chia hết cho 12.

Phương pháp 6 : Phương pháp quy nạp toán học

Với những mệnh đề phụ thuộc vào số tự nhiên n ta có thể dùng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh. Phương pháp này gồm ba bước :

- Chứng minh mệnh đề đúng với một số tự nhiên n_0 nào đó (chẳng hạn n_0 = 1).
- Giả sử mệnh đề đúng với n = k (đây là giả thiết quy nạp), ta phải chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1.
- Kết luận : Mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

Ví dụ 53. Chứng minh rằng với $n \in N$ thì

$$A = 7^n + 3n - 1 \vdots 9 \qquad (1).$$

Giải

• Với n = 0 thì A(0) =1+0 — 1=0: 9. Vậy (1) đúng với n = 0.

• Giả sử (1) đúng với n = k nghĩa là $7^k + 3k - 1 \vdots 9$ (đây là giả thiết quy nạp), ta phải chứng minh (1) đúng với n = k + 1, nghĩa là phải chứng minh $7^{k+1} + 3(k+1) - 1 \vdots 9$

Ta có $7^{k+1} + 3(k+1) - 1 = 7.7^k + 3k + 2$

$$= 7.7^k + 21k - 7 - 18k + 9 = 7\left(7^k + 3k - 1\right) - 9\left(2k - 1\right).$$

Vì $7^k + 3k - 1 \vdots 9$, nên $7\left(7^k + 3k - 1\right) - 9\left(2k - 1\right) \vdots 9$.

• Do đó $A \vdots 9$ với mọi $n \in N$.

Ví dụ 54. Chứng minh rằng với $n \in N$ thì $B = 12^{2n+1} + 11^{n+2} : 133 \quad (1)$

Giải

• Với n = 0 thì B(0) = 12 + 121 = 133 $\vdots$ 133.

Vậy (1) đúng với n = 0.

• Giả sử (1) đúng với n = k nghĩa là $12^{2k+1} + 11^{n+2} \vdots 133$ (đây là giả thiết quy nạp), ta phải chứng minh $12^{2(k+1)+1} + 11^{k+3} \vdots 133$.

Ta có $12^{2k+3} + 11^{k+3} = 144:12^{2k+1} + 11.11^{k+2} = 11.12^{2k+1} + 11.11^{k+2} + 133.12^{2k+1}$

$$= 11\left(12^{2k+1} + 11^{k+2}\right) + 133.12^{2k+1}$$

Vì $12^{2k+1} + 11^{k+2} \vdots 133$ và $133 \vdots 133$ nên

$$11.\left(12^{2k+1} + 11^{k+2}\right) + 133.12^{2k+1} \vdots 133.$$

• Do đó $B \vdots 133$ với mọi $n \in N$.

C. BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng :

a) Tích của hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8 ;

b) Tích của 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 120.

2. Cho $n \in Z$, chứng minh rằng :

a) $A = n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n$ chia hết cho 24 ;

b) $B = n^5 - 5n^3 + 4n$ chia hết cho 120.

3. Chọn số tự nhiên $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ có tổng bằng 999.

Chứng minh rằng $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 \,\vdots\, 3$

4. Cho $n \in N$, chứng minh rằng :

a) $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ chia hết cho 17 ;

b) $6^{2n+1} + 5^{n+2}$ chia hết cho 31 ;

c) $9^{2n} + 39$ chia hết cho 40.

5. Chứng minh rằng :

a) $\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 20^3\right) \,\vdots\, \left(1 + 2 + 3 + ... + 20\right)$;

b) $\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 21^3\right) \,\vdots\, \left(1 + 2 + 3 + ... + 21\right)$.

6. Cho $n \in Z$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức $A = n\left(n^2 + 1\right)\left(n^2 + 2\right)$ chia hết cho 3.

7. a) Tìm số nguyên tố p để $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ đều là số nguyên tố.

b) Tìm số tự nhiên n để $n + 2$; $2n^2 + 8n + 9$; $4n^2 + 16n + 17$ đồng thời là các số nguyên tố.

8. Cho ba số nguyên a, b, c. Chứng minh rằng tích $p = (a - b)(b - c)(c - a) \vdots 2$.

9. Chứng minh rằng trong 92 số tự nhiên, mỗi số có 3 chữ số bao giờ cũng chọn ra được hai số sao cho khi viết kề nhau ta được một số có 6 chữ số. Chứng minh rằng số có 6 chữ số này chia hết cho 91.

10. Chứng minh rằng số được thành lập bởi 3^n chữ số giống nhau thì chia hết cho 3^n với n nguyên dương.

(Thi HSG toàn quốc năm 1979)