CÁC DẠNG TOÁN

VẤN ĐỀ 1: TÌM TẬP XÁC ĐỊNH, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC.

DẠNG 1: TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC :

PHƯƠNG PHÁP: Sử dụng các mệnh đề tương đương sau:

$y=\frac{f(x)}{g(x)}$ xác định $\Leftrightarrow g(x)\neq 0$

$y=\sqrt[2n]{f(x)}, n\in\mathbb{N}^*$ xác định $\Leftrightarrow f(x)\geq 0$.

$y=\sin[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định.

$y=\cos[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định.

$y=\tan[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$y=\cot[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x)\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a). $y=\sqrt{3-2\cos x}$ b). $y=\sin\frac{\pi^2}{2x-1}$ c). $y=\sin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right)$

d). $y=3\cot(2x+3)$ e). $y=2\sin 3x+\tan(1-4x)$ f). $y=\frac{\sin x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$

LỜI GIẢI

a). $y=\sqrt{3-2\cos x}$, hàm số xác định khi $3-2\cos x\geq 0\Leftrightarrow \cos x\leq\frac{3}{2}$ (đúng $\forall x\in\mathbb{R}$), vì $-1\leq\cos x\leq 1, \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

b). $y=\sin\frac{\pi^2}{2x-1}$ hàm số xác định $\Leftrightarrow\frac{\pi^2}{2x-1}$ xác định $\Leftrightarrow 2x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{1}{2}$. Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

c). $y=\sin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right)$ hàm số xác định $\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ xác định $\Leftrightarrow x^2-4>0\Leftrightarrow x^2>4 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. Tập xác định của hàm số $D=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

d). $y=3\cot(2x+3)=\frac{3\cos(2x+3)}{\sin(2x+3)}$ hàm số xác định $\Leftrightarrow\sin(2x+3)\neq 0 \Leftrightarrow 2x+3\neq k\pi$

$\Leftrightarrow x\neq-\frac{3}{2}+\frac{k\pi}{2}, (k\in\mathbb{Z})$.

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}+\frac{k\pi}{2}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

- $\text{Min}\,y = \dfrac{7}{4}$ khi $\tan x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\dfrac{1}{2}$.
- $\text{Max}\,y = 4$ khi $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

l). $y = 2\sin^2 x - \sin 2x + 7 = 2.\dfrac{1-\cos 2x}{2} - \sin 2x + 7 \;\; = -\cos 2x - \sin 2x + 8$

$= -2(\cos 2x + \sin 2x) + 8 = -2\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 8$.

Có $-1 \le \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \ge -2\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \ge -2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} + 8 \ge -2\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 8 \ge -2\sqrt{2} + 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} + 8 \ge y \ge -2\sqrt{2} + 8$. Vậy :

- $\text{Min}\,y = -2\sqrt{2} + 8$ khi $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\text{Max}\,y = 2\sqrt{2} + 8$ khi $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{4} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau trên khoảng đã chỉ ra:

$y = \sin x + \dfrac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0;\pi)$

$y = \dfrac{(\sin x + \cos x)^3}{\cos x \sin^2 x}$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$