9). $\sqrt{2}\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x$ (*). Đặt $t=x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=t-\frac{\pi}{4}$.

$(*)\Leftrightarrow \sin^3 t=\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \sin^3 t=\sin t-\cos t=(\sin t-\cos t)(\sin^2 t+\cos^2 t)$

$\Leftrightarrow \cos t(-\sin^2 t+\sin t\cos t-\cos^2 t)=0\Leftrightarrow \cos t(\sin 2t-2)\Leftrightarrow \cos t=0 \vee \sin 2t=2$

$\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}+k\pi.$ Suy ra: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ với $k\in ¢$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ với $k\in ¢$.

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐẶC BIỆT

Giải các phương trình sau:

1). $3\tan^2 x+4\sin^2 x-2\sqrt{3}\tan x-4\sin x+2=0$

2). $\sin 4x-\cos 4x=1+4\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

3). $\sin 3x(\cos x-2\sin 3x)+\cos 3x(1+\sin x-2\cos 3x)=0$

4). $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\sin x-\cos x+4=0$.

5). $\cos 2x=\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}$.

6). $\cos 3x+\sqrt{2-\cos^2 3x}=2(1+\sin^2 2x)$

7). $\sin^{1996} x+\cos^{1996} x=1$

8). $\sin^4 x+\cos^{15} x=1$

9). $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right)=1+\cos(\pi\sin 2x)$

LỜI GIẢI

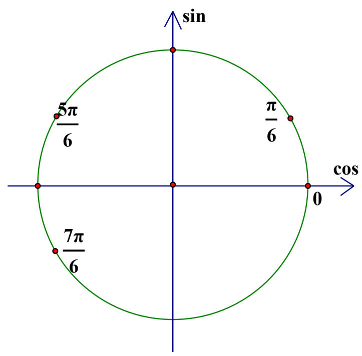
1). $3\tan^2 x+4\sin^2 x-2\sqrt{3}\tan x-4\sin x+2=0$

$\Leftrightarrow \left(3\tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x+1\right)+\left(4\sin^2 x-4\sin x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\tan x-1\right)^2+\left(2\sin x-1\right)^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \end{cases}$$

Biểu diễn nghiệm trên vòng tròn lượng giác:



Nghiệm của $\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$ được biểu diễn hai đầu mút là $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}$.

Nghiệm của $2\sin x - 1 = 0$ được biểu diễn hai đầu mút là $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$.

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$

2). $\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin 4x - (1 + \cos 4x) = 4(\sin x - \cos x)$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x - 2\cos^2 2x = 4(\sin x - \cos x)$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) = 2(\sin x - \cos x)$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)\left[(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2\right] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0$ hoặc $(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2 = 0$ (2)

Giải (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in ¢$

Giải $(2) \Leftrightarrow -2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin 3x = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{m2\pi}{3} \end{cases}; m, k \in ¢$. Hệ (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$k2\pi = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{m2\pi}{3} \Leftrightarrow 12k - 4m = 1$ phương trình này vô nghiệm vì vế trái luôn là một số nguyên chẵn, còn vế phải là số nguyên lẻ. Kết luận (2) vô nghiệm.

Nghiệm phương trình $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in ¢$