Câu : Giải các phương trình sau:

1). $\tan^4 x + 1 = \dfrac{\left(2 - \sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$ [Dự bị 3 ĐH02]

2). $\tan x + \cos x - \cos^2 x = \sin x\left(1 + \tan x.\tan\dfrac{x}{2}\right)$ [Dự bị 4 ĐH02]

3). $\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\dfrac{x}{2} = 0$ [ĐH D03]

4). $3 - \tan x\left(\tan x + 2\sin x\right) + 6\cos x = 0$ [Dự bị 1 ĐH A03]

5). $\cos 2x + \cos x\left(2\tan^2 x - 1\right) = 2$ [Dự bị 2 ĐH A03]

6). $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$ [ĐH B04]

6). $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - 3\tan^2 x = \dfrac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$ [Dự bị 2 ĐH B05]

7). $\tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$ [Dự bị 1 ĐH D05]

8). $\cot x + \sin x\left(1 + \tan x \tan\dfrac{x}{2}\right) = 4$ [ĐH B06]

9). $\sin 2x + \sin x - \dfrac{1}{2\sin x} - \dfrac{1}{\sin 2x} = 2\cot 2x$ [Dự bị 1 ĐH A07]

10). $\dfrac{\sin 2x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \tan x - \cot x$ [Dự bị 2 ĐH B07]

11). $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$ [Dự bị 2 ĐH D07]

LỜI GIẢI

1). $\tan^4 x + 1 = \dfrac{\left(2 - \sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$ (1)

Điều kiện : $\cos x \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} + 1 = \frac{\left(2 - \sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x} \Leftrightarrow \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\cos^4 x} = \frac{\left(2 - \sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = (2 - \sin^2 2x)\sin 3x$$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{\sin^2 2x}{2}=(2-\sin^2 2x)\sin 3x \Leftrightarrow 2-\sin^2 2x=2(2-\sin^2 2x)\sin 3x$

$\Leftrightarrow (2-\sin^2 2x)(1-2\sin 3x)=0 \Leftrightarrow \sin 3x=\dfrac{1}{2}$ hoặc $\sin^2 2x=2$ (vô nghiệm)

$\Leftrightarrow \sin 3x=\sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}$ hoặc $x=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3},\left(k\in ¢\right)$

2). $\tan x+\cos x-\cos^2 x=\sin x\left(1+\tan x.\tan\dfrac{x}{2}\right)$ (1).

Điều kiện : $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos\dfrac{x}{2}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\pi+k2\pi\end{cases},k\in ¢$

Ta có: $1+\tan x.\tan\dfrac{x}{2}=1+\dfrac{\sin x\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x\cos\dfrac{x}{2}}=\dfrac{\cos x\cos\dfrac{x}{2}+\sin x\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x\cos\dfrac{x}{2}}=\dfrac{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\cos x\cos\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{\cos x}$

$(1)\Leftrightarrow \tan x+\cos x-\cos^2 x=\dfrac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x(1-\cos x)=0 \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi,\left(k\in ¢\right)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x=k2\pi,\left(k\in ¢\right)$

3). $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x-\cos^2\dfrac{x}{2}=0$ (1)

Điều kiện : $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow \sin x\neq\pm 1$

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left[1-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{2}\left(1+\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right).\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}-\left(1+\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right)\dfrac{\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)}{\left(1-\sin x\right)\left(1+\sin x\right)}-\left(1+\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)}{1+\sin x}-\left(1+\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)-\left(1+\cos x\right)\left(1+\sin x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1+\cos x\right)\left(\sin x+\cos x\right)=0 \Leftrightarrow 1+\cos x=0$ hoặc $\sin x+\cos x=0$

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ hoặc $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

So với điều kiện nghiệm phương trình $x = \pi + k2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

4). $3 - \tan x\left(\tan x + 2\sin x\right) + 6\cos x = 0 \ (1)$

Điều kiện : $\cos x \neq 0$

$(1) \Leftrightarrow 3 - \dfrac{\sin x}{\cos x}\left(\dfrac{\sin x + 2\sin x\cos x}{\cos x}\right) + 6\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x - \sin^2 x\left(1 + 2\cos x\right) + 6\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x\left(1 + 2\cos x\right) - \sin^2 x\left(1 + 2\cos x\right) = 0 \ \Leftrightarrow \left(1 + 2\cos x\right)\left(3\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(1 + 2\cos x\right)\left(4\cos^2 x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + 2\cos x = 0 \\ 4\cos^2 x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 1 + \cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$

So với điều kiện nghiệm phương trình $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$