Câu : Giải các phương trình sau:

1). Tìm $x \in (0;2\pi): 5\left(\sin x + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$ [ĐH A02]

2). $\sqrt{\dfrac{1}{8\cos^2 x}} = \sin x$ [Dự bị 6 ĐH02]

3). $\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x - 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1$ [Dự bị 2 ĐH B03]

4). $\dfrac{\cos^2 x\left(\cos x - 1\right)}{\sin x + \cos x} = 2\left(1 + \sin x\right)$ [Dự bị 1 ĐH D03]

5). $\dfrac{2\left(\cos^6 x + \sin^6 x\right) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$ [ĐH A06]

6). $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\dfrac{7\pi}{4} - x\right)$ [ĐH A08]

LỜI GIẢI

1). Tìm $x \in (0;2\pi): 5\left(\sin x + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$

Điều kiện : $\sin 2x \ne -\dfrac{1}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow 5\left(\frac{\sin x + 2\sin x \sin 2x + \cos 3x + \sin 3x}{1 + \sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{\sin x + \cos x - \cos 3x + \cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{\sin 3x + \sin x + \cos x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3 \Leftrightarrow 5\left(\frac{2\sin 2x \cos x + \cos x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow 5\frac{\cos x\left(1 + 2\sin 2x\right)}{1 + 2\sin 2x} = \cos 2x + 3 \Leftrightarrow 5\cos x = \cos 2x + 3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 2 \text{ (loại) hoặc } \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ hoặc } x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, \left(k \in ¢\right)$$

Vì $x \in (0;2\pi)$. Nên nghiệm của phương trình : $x = \frac{\pi}{3}\ \ ; x = \frac{5\pi}{3}$

2). $\sqrt{\frac{1}{8\cos^2 x}} = \sin x\ \ (1)$

Điều kiện : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{8\cos^2 x} = \sin^2 x \Leftrightarrow 1 = 8\sin^2 x\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$$

Vì : $\sin x \geq 0 \quad x = \frac{\pi}{8} + m2\pi \quad x = \frac{3\pi}{8} + m2\pi\,; m \in ¢ \quad x = \frac{5\pi}{8} + m2\pi \quad x = \frac{7\pi}{8} + m2\pi$

3). $\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1\ \ (1)$

Điều kiện : $\cos x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in ¢$

$$(1) \Leftrightarrow (2-\sqrt{3})\cos x - \left[1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\cos x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x - \sqrt{3}\cos x - 1 + \sin x = 2\cos x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{6} - \sin x\sin\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ hoặc } x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in ¢)$$

So với điều kiện nghiệm của phương trình : $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi; (k \in ¢)$

4). $\dfrac{\cos^2 x\left(\cos x - 1\right)}{\sin x + \cos x} = 2\left(1 + \sin x\right)\ \ (1)$

Điều kiện : $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow (1 - \sin^2 x)(\cos x - 1) = 2(1 + \sin x)(\sin x + \cos x)$$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)\left[(1-\sin x)(\cos x-1)-2(\sin x+\cos x)\right]=0$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)\left[\cos x-1-\sin x\cos x+\sin x-2\sin x-2\cos x\right]=0$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)\left[\sin x+1+\sin x\cos x+\cos x\right]=0$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)\left[(1+\sin x)+\cos x(1+\sin x)\right]=0$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)^2(1+\cos x)=0 \Leftrightarrow \sin x=-1 \vee \cos x=-1$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=\pi+k2\pi,(k\in ¢)$

So với điều kiện nghiệm phương trình $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$, $x=\pi+k2\pi,(k\in ¢)$

6). $\frac{2\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0$ (1)

Điều kiện : $\sin x\neq\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x\neq\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{cases},(k\in ¢)$

(1) $\Leftrightarrow 2\left(\sin^6+\cos^6 x\right)-\sin x\cos x=0 \;\Leftrightarrow 2\left(1-\frac{3\sin^2 2x}{4}\right)-\frac{1}{2}\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x+\sin 2x-4=0\Leftrightarrow \sin 2x=1$ hoặc $\sin 2x=\frac{4}{3}$ (loại).

Với $\sin 2x=1\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in ¢)$

So với điều kiện nghiệm của (1) là $x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi,(k\in ¢)$

7). $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$ (1)

Điều kiện : $\sin x\neq 0$ và $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\neq 0$

Chú ý : $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=\cos x$

$\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$

$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = -2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x)\left(\frac{1+\sqrt{2}\sin 2x}{\sin 2x}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$ hoặc $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi; k \in ¢$

Nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$, $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi; k \in ¢$

1.29: Giải các phương trình:

a) $(1-\tan x)(1+\sin 2x) = 1 + \tan x$

b) $2\tan x.\cos x + 1 = 2\cos x + \tan x$

c) $\sin 2x + 2\tan x = 3$

d) $\sin 2x = 2\cos x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3}$

LỜI GIẢI

a) $(1-\tan x)(1+\sin 2x) = 1+\tan x \quad (1)$. Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$(1) \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)(1+\sin 2x) = 1 + \frac{\sin x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}\right)(\sin x + \cos x)^2 = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left[(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = k\pi \\ 2x = k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. \quad (k \in z).$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = k\pi \quad (k \in z)$

b) $2\tan x.\cos x + 1 = 2\cos x + \tan x \quad (1)$. Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in ¢)$

$(1) \Leftrightarrow 2\tan x.\cos x + 1 - 2\cos x - \tan x = 0$

$\Leftrightarrow \tan x(2\cos x - 1) - (2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\tan x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x - 1 = 0 \\ \tan x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \tan x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in ¢).$$

So với điều kiện của phương trình: $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in ¢)$.

c) $\sin 2x + 2\tan x = 3$ (1). Điều kiện $\cos x \neq 0$

$(1) \Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2\tan x = 3 \Leftrightarrow \dfrac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x} = \dfrac{3}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 2\tan x + 2\tan x(1 + \tan^2 x) = 3(1 + \tan^2 x)$

$\Leftrightarrow 2\tan^3 x - 3\tan^2 x + 4\tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, (k \in ¢)$