Câu 8: Chứng minh các đẳng thức sau:

a). $A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}=k^2A_{n+k}^{n}$ với $n,k\in N^*,k\ge 2$.

b). $A_n^k-A_{n-1}^k=k.A_{n-1}^{k-1}$ với $n,k\in N^*,n\ge 2,k\le n-1$.

c). $\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k}+\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\frac{1}{C_n^k}$ với $n,k\in N^*,k\le n$.

LỜI GIẢI

a). Ta có: $A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}=\frac{(n+k)!}{(k-2)!}+\frac{(n+k)!}{(k-1)!}=\frac{(n+k)!}{(k-2)!}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)$

$$=\frac{(n+k)!k}{(k-2)!k-1}=k^2\frac{(n+k)!}{k!}=k^2.A_{n+k}^{n}.$$

b). Ta có:

$$A_n^k-A_{n-1}^k=\frac{n!}{(n-k)!}-\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}=\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}.\left(\frac{n}{n-k}-1\right)=k\frac{(n-1)!}{(n-k)!}=kA_{n-1}^{k-1}.$$

c). Ta có: $\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k}+\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\frac{n+1}{n+2}.\frac{k!(n+1-k)!+(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}$

$$=\frac{1}{n+2}.\frac{k!(n-k)!}{n!}\left[(n+1-k)+(k+1)\right]=\frac{k!(n-k)!}{n!}=\frac{1}{C_n^k}.$$

Câu 9: Chứng minh $\forall k,n\in$ ¥ * thỏa mãn $3\le k\le n$ ta luôn có:

$$C_n^k+3C_n^{k-1}+2C_n^{k-2}=C_{n+3}^k-C_n^{k-3}-C_n^{k-2}.$$

LỜI GIẢI

Ta có:

$C_n^k+3C_n^{k-1}+2C_n^{k-2}=C_{n+3}^k-C_n^{k-3}-C_n^{k-2}\Leftrightarrow C_n^k+3C_n^{k-1}+3C_n^{k-2}+C_n^{k-3}=C_{n+3}^k\quad(5)$

$VT(5)=C_n^k+C_n^{k-1}+2\left(C_n^{k-1}+C_n^{k-2}\right)+C_n^{k-2}+C_n^{k-3}=C_{n+1}^k+2C_{n+1}^{k-1}+C_{n+1}^{k-2}$

$=\left(C_{n+1}^k+C_{n+1}^{k-1}\right)+\left(C_{n+1}^{k-1}+C_{n+1}^{k-2}\right)=C_{n+2}^k+C_{n+2}^{k-1}=C_{n+3}^k$ (điều phải chứng minh).

10. Chứng minh rằng các đẳng thức sau:

a. $C_n^k+4C_n^{k-1}+6C_n^{k-2}+4C_n^{k-3}+C_n^{k-4}=C_{n+4}^k$ với $4\le k\le n$.

b. $P_k.A_{n+1}^2.A_{n+3}^2.A_{n+5}^2=n.k!.A_{n+5}^5$.

c. $C_n^0.C_n^k+C_n^1.C_{n-1}^{k-1}+\ldots+C_n^k.C_{n-k}^0=2^k.C_n^k$.

LỜI GIẢI

a). Ta có: $VT=\left(C_n^k+C_n^{k-1}\right)+3\left(C_n^{k-1}+C_n^{k-2}\right)+3\left(C_n^{k-2}+C_n^{k-3}\right)+\left(C_n^{k-3}+C_n^{k-4}\right)$

$$=C_{n+1}^k+3C_{n+1}^{k-1}+3C_{n+1}^{k-2}+C_{n+1}^{k-3}=C_{n+4}^k.$$

b). Ta có: $VT=k!\frac{(n+1)!}{(n-1)!}.\frac{(n+3)!}{(n+1)!}.\frac{(n+5)!}{(n+3)!}=k!\frac{(n+5)!}{(n-1)!}=nk!A_{n+5}^5$.

c). Ta có:

$$C_n^m C_{n-m}^{k-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} = \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!}$$

$$= \frac{k!}{m!(k-m)!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_k^m . C_n^k$$

Suy ra: $\sum_{m=0}^{k} C_n^m C_{n-m}^{k-m} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m C_n^k = C_n^k \sum_{m=0}^{k} C_k^m = 2^k . C_n^k$.

11. Chứng minh rằng các đẳng thức sau:

a). $A_n^k - A_{n-1}^k = k.A_{n-1}^{k-1}$ với $n,k \in N^*, n \ge 2, k \le n-1$.

b). $\frac{n+1}{n+2}\left[\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right] = \frac{1}{C_n^k}$ với $n,k \in N^*, k \le n$.

LỜI GIẢI

a. Ta có:

$$A_n^k - A_{n-1}^k = \frac{n!}{(n-k)!} - \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\left(\frac{n}{n-k} - 1\right) = k\frac{(n-1)!}{(n-k)!} = k.A_{n-1}^{k-1}.$$

b. Ta có: $\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{k!(n+1-k)! + (k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}$

$$= \frac{1}{n+2}\cdot\frac{k!(n-k)!}{n!}\left[(n+1-k) + (k+1)\right] = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{C_n^k}.$$

12. Chứng minh rằng các đẳng thức sau:

a). $C_n^1 ... C_n^{n-1} \le \left(\frac{2^n - 1}{n}\right)^n$ với $n \in N^*, n \ge 2$.

b). $C_{2n+k}^n . C_{2n-k}^n \le \left(C_{2n}^n\right)^2$ với $\forall n,k \in Z$ và $0 \le k \le n$.

LỜI GIẢI

a. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số, ta có:

$$C_n^0 C_n^1 ... C_n^{n-1} \le \left(\frac{C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n - C_n^n}{n}\right)^n = \left(\frac{2^n - 1}{n}\right)^n$$

b. Ta đặt $a_k = C_{2n+k}^n . C_{2n-k}^n \Rightarrow \begin{cases} a_k = \frac{(2n+k)!}{n!(n+k)!}\cdot\frac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} \\ a_{k+1} = \frac{(2n+k+1)!}{n!(n+k+1)}\cdot\frac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!} \end{cases}$

Để chứng minh BĐT trên ta chứng minh $a_k > a_{k+1}, \forall k \in Z, 0 \le k \le n$

Ta có: $a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow \frac{(2n+k)!}{n!(n+k)!}\cdot\frac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} > \frac{(2n+k+1)}{n!(n+k+1)}\cdot\frac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{2n-k}{n-k} > \frac{2n+k+1}{n+k+1} \Leftrightarrow 1+\frac{n}{n-k} > 1+\frac{n}{n+k+1}$$

$$\Rightarrow a_0 > a_1 > \ldots > a_k > a_{k+1} \Rightarrow a_0 > a_k \Rightarrow C_{2n+k}^{n}.C_{2n-k}^{n} \le \left(C_{2n}^{n}\right)^2.$$

13. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}.$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}, 1 \le k \le n.$$

$$C_n^1 + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + 3\frac{C_n^3}{C_n^2} + \ldots + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = C_{n+1}^2.$$

$$P_n = 1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + (n+1)P_{n-1}.$$

LỜI GIẢI

Ta có: $VT = 2\left(C_n^k + C_n^{k+1}\right) + 3\left(C_n^{k+1} + C_n^{k+2}\right) + C_n^{k+2} + C_n^{k+3}$

$$2\left(C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2}\right) + C_{n+1}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}.$$

Ta có: $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k \Rightarrow C_{n-1}^{k-1} = C_n^k - C_{n-1}^k$

Suy ra: $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-1} = C_n^k - C_k^k$

Hay $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}$ vì $C_k^k = C_{k-1}^{k-1} = 1.$

Ta có: $k.\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = n-k+1$

Suy ra $C_n^1 + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + 3\frac{C_n^3}{C_n^2} + \ldots + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = \frac{n(n-1)}{2} = C_{n+1}^2.$

Ta có: $P_k - P_{k-1} = k! - (k-1)! = (k-1)P_{k-1}$

Suy ra: $\sum_{k=2}^{n}(k-1)P_{k-1} = P_n - P_1 \Rightarrow P_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} kP_k.$

DẠNG 2: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC DỰA VÀO KHAI TRIỂN $(1+x)^n$

Câu 10: Chứng minh : $C_n^k C_m^0 + C_n^{k-1}C_m^1 + C_n^{k-2}C_m^2 + \cdots + C_n^{k-m}C_m^m = C_{n+m}^k$,

với $\begin{cases} 0 \le m \le k \le n \\ k, m, n \in ¥ \end{cases}$

LỜI GIẢI

Ta có $\begin{cases} (1+x)^m = C_m^0 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \cdots + C_m^m x^m \\ (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n \\ (1+x)^{m+n} = C_{m+n}^0 + C_{m+n}^1 x + C_{m+n}^2 x^2 + \cdots + C_{m+n}^{m+n} x^{m+n} \end{cases}$

Suy ra hệ số x^k trong $(1+x)^m(1+x)^n$ là : $C_m^0 C_n^k + C_n^1 C_n^{k-1} + \cdots + C_m^m C_n^{k-m}$, và hệ số của x^k trong $(1+x)^{m+n}$ là C_{m+n}^k

Ta có $(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$. Từ đó suy ra :

$C_n^kC_m^0+C_n^{k-1}C_m^1+C_n^{k-2}C_m^2+\cdots+C_n^{k-m}C_m^m=C_{n+m}^k$ (đpcm) .

Kết quả bài này các bạn phải nhớ kỹ để áp dụng vào những bài tính tổng.

Bạn đọc hãy lấy ý tưởng trong bài tập trên áp dụng với khai triển $(1-x)^{n+m}$.

Từ đó chứng minh rằng $\left(C_{2n}^0\right)^2-\left(C_{2n}^1\right)^2+...+\left(C_{2n}^{2n}\right)^2=(-1)^n.C_{2n}^n$.

Câu 11: Tính tổng $S=C_{20}^0C_{12}^{11}+C_{20}^1C_{12}^{10}+C_{20}^2C_{12}^9+\cdots+C_{20}^{10}C_{20}^1+C_{20}^{11}C_{12}^0$

LỜI GIẢI

Ta có $(1+x)^{32}=(1+x)^{20}(1+x)^{12}$ (1)

Mà $(1+x)^{32}=C_{32}^0+C_{32}^1x+C_{32}^2x^2+\cdots+C_{32}^{32}x^{32}$.

Hệ số của x^{11} trong khai triển là C_{32}^{11} (2) .

Và $(1+x)^{20}(1+x)^{12}=\left(C_{20}^0+C_{20}^1x+C_{20}^2x^2+\cdots+C_{20}^{20}x^{20}\right)\left(C_{12}^0+C_{12}^1x+C_{12}^2x^2+\cdots+C_{12}^{12}x^{12}\right)$. Hệ số của x^{11} trong khai triển là $C_{20}^0C_{12}^{11}+C_{20}^1C_{12}^{10}+C_{20}^2C_{12}^9+\cdots+C_{20}^{10}C_{20}^1+C_{20}^{11}C_{12}^0$ (3)

Từ (1) , (2) , (3) ta có $S=C_{20}^0C_{12}^{11}+C_{20}^1C_{12}^{10}+C_{20}^2C_{12}^9+\cdots+C_{20}^{10}C_{20}^1+C_{20}^{11}C_{12}^0=C_{32}^{11}$

Câu 12: Chứng minh rằng với mọi cặp số nguyên k, n thỏa $(0\le k\le n-2013)$ ta có:

$C_{2013}^0C_n^k+C_{2013}^1C_n^{k+1}+C_{2013}^2C_n^{k+2}+\cdots+C_{2013}^{2013}C_n^{k+2013}=C_{n+2013}^{k+2013}$

LỜI GIẢI

Ta có: $(1+x)^{n+2013}=(1+x)^{2013}(1+x)^n$ (1)

Ta có: $\begin{cases}(x+1)^{2013}=C_{2013}^0x^{2013}+C_{2013}^1x^{2012}+C_{2013}^2x^{2011}+\cdots+C_{2013}^{2013}\\(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n\\(1+x)^{n+2013}=C_{n+2013}^0+C_{n+2013}^1x+\cdots+C_{n+2013}^{k+2013}x^{k+2013}+\cdots+C_{n+2013}^{n+2013}x^{n+2013}\end{cases}$

Hệ số của x^{k+2013} trong khai triển $(1+x)^{2013}(1+x)^n$ là:

$C_{2013}^0C_n^k+C_{2013}^1C_n^{k+1}+C_{2013}^2C_n^{k+2}+\cdots+C_{2013}^{2013}C_n^{k+2013}$ (2)

Hệ số của x^{k+2013} trong khai triển $(1+x)^{n+2013}$ là: C_{n+2013}^{k+2013} (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $C_{2013}^0C_n^k+C_{2013}^1C_n^{k+1}+C_{2013}^2C_n^{k+2}+\cdots+C_{2013}^{2013}C_n^{k+2013}=C_{n+2013}^{k+2013}$

Câu 13: Chứng minh đẳng thức sau:

$C_{11}^0a_0-C_{11}^1a_1+C_{11}^2a_2-C_{11}^3a_3+...+C_{11}^{10}a_{10}-C_{11}^{11}a_{11}=11$

LỜI GIẢI

Xét $x\ne1$ từ khai triển trên nhân hai vế với $(x-1)^{11}$ ta có:

$(x^{11}-1)^{11}=(x-1)^{11}(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{110}x^{110})$ (2)

$VT(2)=\sum_{k=0}^{11} C_{11}^{k} x^{11k}(-1)^{11-k}$ $\Rightarrow$ Hệ số của x^{11} trong vế trái bằng $C_{11}^{1}=11$.

$VP(2)=\left(\sum_{k=0}^{11} C_{11}^{k} x^{11-k}(-1)^{k}\right)\left(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{110}x^{110}\right)$

$\Rightarrow$ Hệ số của x^{11} trong vế phải bằng

$$C_{11}^{0}a_0-C_{11}^{1}a_1+C_{11}^{2}a_2-C_{11}^{3}a_3+...+C_{11}^{10}a_{10}-C_{11}^{11}a_{11}$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh

Câu 14: Chứng minh rằng : $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^{n}$

LỜI GIẢI

Ta có $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$

Ta có $(1+x)^n(1+x)^n=\left(C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+...+C_n^n\right)\left(C_n^0+C_n^1x\ +...+C_n^nx^n\right)$

Hệ số của x^n trong hệ thức trên là: $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2$

Hệ số của x^n trong khai triển $(1+x)^{2n}$ là C_{2n}^{2}.

Ta có hệ số của x^n trong khai triển $(1+x)^n(1+x)^n$ và hệ số của x^n trong khai triển $(1+x)^{2n}$ giống nhau.

Từ đó suy ra $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^{n}$ (đpcm).

1. Chứng minh: $C_{2n}^0+C_{2n}^2.3^2+C_{2n}^4.3^4+...+C_{2n}^{2n}.3^{2n}=2^{2n-1}(2^{2n}+1)$

LỜI GIẢI

Ta có $(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+\cdots+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}\quad(1)$

Chọn $x=3$ thay vào hai vế của (1) ta được:

$4^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1.3^1+C_{2n}^2.3^2+...+C_{2n}^{2n-1}.3^{2n-1}+C_{2n}^{2n}.3^n$ (2)

Chọn $x=-3$ thay vào hai vế của (1) ta được:

$2^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1.3^1+C_{2n}^2.3^2+...-C_{2n}^{2n-1}.3^{2n-1}+C_{2n}^{2n}.3^n$ (3)

Lấy (2) + (3) ta được: $4^{2n}+2^{2n}=2\left(C_{2n}^0+C_{2n}^2.3^2+C_{2n}^4.3^4+...+C_{2n}^{2n}.3^{2n}\right)$

$\Rightarrow C_{2n}^0+C_{2n}^2.3^2+C_{2n}^4.3^4+...+C_{2n}^{2n}.3^{2n}=\dfrac{4^{2n}+2^{2n}}{2}=\dfrac{\left(2^{2n}\right)^2+2^{2n}}{2}$

$=\dfrac{2^{2n}\left(2^{2n}+1\right)}{2}=2^{2n-1}\left(2^{2n}+1\right)$