Ví dụ 1: Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n = \sqrt{n^2+3n+5} - n$ b). $u_n = \sqrt{9n^2+3n-4} - 3n + 2$

c). $u_n = \sqrt[3]{n^3+3n^2} - n$ d). $u_n = \sqrt[3]{8n^3+4n^2+2} - 2n + 3$

e). $u_n = \sqrt{4n^2+3n+7} - \sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}$ f). $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1} - \sqrt[3]{n^6+1}\right)$

LỜI GIẢI

a). Ta có $u_n = \sqrt{n^2+3n+5} - n = \dfrac{\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n+5}+n} = \dfrac{3n+5}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}$. Và có

$3n+5 = n\left(\dfrac{3n+5}{n}\right) = n\left(3+\dfrac{5}{n}\right)$ và $\sqrt{n^2+3n+5} = \sqrt{n^2\left(\dfrac{n^2+3n+5}{n^2}\right)} = n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}$.

Do đó $u_n = \dfrac{n\left(3+\dfrac{5}{n}\right)}{n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+n} = \dfrac{3+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+1}$, vì $\lim\dfrac{5}{n} = 0$, $\lim\dfrac{3}{n} = 0$ và $\lim\dfrac{5}{n^2} = 0$. Nên $\lim u_n = \dfrac{3}{2}$.

NHẬN XÉT : Tại sao phải nhân lượng liên hợp ?

Quay lại ví dụ a) thông thường ta đặt n^k làm nhân tử chung nhưng sao lại phải nhân lượng liên hợp. Bây giờ ta thử làm lại câu a) theo phương pháp đặt n^k trong căn thức thử xem sao ,và sau đó rút ra nhận xét.

Ta có $u_n = \sqrt{n^2+3n+5} - n = \sqrt{n^2\left(\dfrac{n^2+3n+5}{n^2}\right)} - n = n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}} - n = n\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}-1\right)$. Vì

$\lim\dfrac{3}{n} = \lim\dfrac{5}{n^2} = 0$ nên $\lim\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}-1\right) = 0$ và $\lim n = +\infty$ do đó $\lim u_n = +\infty.0$ (đây là dạng vô định). Nên cách làm này không là không được rồi, ta phải sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp để khử vô định sau đó cách làm hoàn toàn như dạng 1.

Dấu hiệu nhận biết nhân lượng liên hợp : Để nhận biết một bài tập có nhân lượng liên hợp hay không các bạn chỉ chú ý tới n có mũ cao nhất sau đó đưa ra ngoài dấu căn thức, nếu chúng trừ nhau bằng 0 thì bài này ta phải nhân lượng liên hợp. Cụ thể ta làm lại câu a) $u_n = \sqrt{n^2+3n+5} - n$ biểu thức trong căn thức có n^2 là cao nhất và ta quan tâm đến « nó », những thừa số sau bỏ hết có nghĩa xem $u_n = \sqrt{n^2} - n = n - n = 0$ (nên các bạn phải nhân lượng liên hợp). Chúng ta xem thử bài này có nhân lượng liên hợp hay không $u_n = \sqrt{2n^2+3n+5} - n$ chúng ta cũng quan tâm đến số hạng có chứa mũ có nhất đó là $2n^2$, có nghĩa u_n được viết lại $u_n = \sqrt{2n^2} - n = n\sqrt{2} - n = n\left(\sqrt{2}-1\right)$ ta có $\sqrt{2}-1 \neq 0$ nên bài này được làm trực tiếp không cần nhân lượng liên hợp. Cụ thể bài này ta làm như sau

$u_n = \sqrt{2n^2+3n+5} - n = \sqrt{n^2\left(\dfrac{2n^2+3n+5}{n^2}\right)} - n = n\sqrt{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}} - n = n\left(\sqrt{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}-1\right)$ do

$\lim\dfrac{3}{n} = \lim\dfrac{5}{n^2} = 0$ nên $\lim\left(\sqrt{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}-1\right) = \sqrt{2}-1$ và $\lim n = +\infty$ do đó $\lim u_n = +\infty.\left(\sqrt{2}-1\right) = +\infty$ (cụ thể các bạn xem phương pháp tìm giới hạn dãy số có giới hạn vô cực).

b). $u_n=\sqrt{9n^2+3n-4}-3n+2=\dfrac{\left(\sqrt{9n^2+3n-4}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2+3n-4}+3n\right)}{\sqrt{9n^2+3n-4}+3n}+2=\dfrac{3n-4}{\sqrt{9n^2+3n-4}+3n}+2$. Ta có $3n-2=n\left(\dfrac{3n-2}{n}\right)=n\left(3-\dfrac{2}{n}\right)$ và $\sqrt{9n^2+3n-4}=\sqrt{n^2\left(\dfrac{9n^2+3n-4}{n^2}\right)}=n\sqrt{9+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}$. Từ đó suy ra

$u_n=\dfrac{n\left(3-\dfrac{2}{n}\right)}{n\sqrt{9+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}+3n}+2=\dfrac{3-\dfrac{2}{n}}{\sqrt{9+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}+3}+2$, vì $\lim\dfrac{2}{n}=0$, $\lim\dfrac{3}{n}=0$ và $\lim\dfrac{4}{n^2}=0$. Nên $\lim u_n=\dfrac{3-0}{\sqrt{9+0-0}+3}=\dfrac{1}{2}$.

c). $u_n=\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n=\dfrac{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n\right)\left[\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}$

$=\dfrac{3n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}$. Ta có $\sqrt[3]{n^3+3n^2}=\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{n^3+3n^2}{n^3}\right)}=n.\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}$. Do đó

$u_n=\dfrac{3n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}\right)^2+n^2.\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}+n^2}=\dfrac{3}{\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n}}+1}$, ta có $\lim\dfrac{3}{n}=0$. Nên $\lim u_n=1$

d). $u_n=\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n+3$

$=\dfrac{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n\right)\left[\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}\right)^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}+4n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}\right)^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}+4n^2}+3$

$=\dfrac{4n^2+2}{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}\right)^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}+4n^2}+3$.

Ta có $\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}=\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{8n^3+4n^2+2}{n^3}\right)}=n\sqrt[3]{8+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^3}}$. Do đó

$u_n=\dfrac{n^2\left(4+\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^3}}\right)^2+2n^2.\sqrt[3]{8+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^3}}+4n^2}=\dfrac{4+\dfrac{2}{n^2}}{\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^3}}\right)^2+2.\sqrt[3]{8+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^3}}+4}$. Vì $\lim\dfrac{2}{n^2}=0$, $\lim\dfrac{4}{n}=0$ và $\lim\dfrac{2}{n^3}=0$. Nên $\lim u_n=\dfrac{1}{3}$.

e). $u_n=\sqrt{4n^2+3n+7}-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}=\left(\sqrt{4n^2+3n+7}-2n\right)+\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)$

• Tính $\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+7}-2n\right)=\lim\dfrac{3n+7}{\sqrt{4n^2+3n+7}+2n}=\lim\dfrac{3+\dfrac{7}{n}}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}}+2}=\dfrac{3}{4}$

• Tính $\lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)$

$$=\lim\frac{\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)\left[4n^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}+\left(\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)^2\right]}{4n^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}+\left(\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)^2}$$

$$=\lim\frac{-5n^2-1}{4n^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}+\left(\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)^2}\quad(1)$$

Có $\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}=\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{8n^3+5n^2+1}{n^3}\right)}=n.\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}$

Nên $(1)\Leftrightarrow\lim\dfrac{n^2\left(-5-\dfrac{1}{n^2}\right)}{4n^2+2n^2.\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}+n^2.\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}\right)^2}$

$$=\lim\frac{-5-\dfrac{1}{n^2}}{4+2.\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}+\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}\right)^2}=-\frac{5}{12}.$$

Từ đó suy ra $\lim u_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{12}=\dfrac{1}{3}$.

f). $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)=\lim\left[\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\right)-\left(\sqrt[3]{n^6+1}-n^2\right)\right]$

• Tính $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\right)=\lim\left(\dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2}\right)=\lim\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

• Tính $\lim(\sqrt[3]{n^6+1}-n^2)=\lim\dfrac{1}{\sqrt[3]{(n^6+1)^2}+n^2\sqrt[3]{(n^6+1)}+n^4}=0$

Do đó $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}$ b). $u_n=\dfrac{2n-\sqrt{4n^2+n}}{n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}}$

c). $\lim\left(2n-\sqrt{9n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}\right)$ d). $\lim\left(\sqrt{n^2-2n}+2\sqrt[3]{n^2-8n^3}+3\sqrt{n^2+n}\right)$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\sqrt{n^2+n}-n=\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\dfrac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$ và

$$\sqrt{4n^2+3n}-2n=\frac{\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+3n}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}=\frac{3n}{n\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2n}=\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}.$$

Do đó $\lim u_n=\lim\dfrac{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}{3\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\dfrac{2}{3}$.

b). $\lim\dfrac{2n-\sqrt{4n^2+n}}{n+\sqrt[3]{4n-n^3}}$

Ta có $2n-\sqrt{4n^2+n}$

$$=\frac{\left(2n-\sqrt{4n^2+n}\right)\left(2n+\sqrt{4n^2+n}\right)}{2n+\sqrt{4n^2+n}}=\frac{-n}{2n+\sqrt{4n^2+n}}=\frac{-1}{2+\sqrt{4+\frac{1}{n}}}$$

và $n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}=\dfrac{\left(n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)\left[n^2-n.\sqrt[3]{4n^2-n^3}+\left(\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)^2\right]}{n^2-n.\sqrt[3]{4n^2-n^3}+\left(\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)^2}$

$$=\frac{4n^2}{n^2-n.\sqrt[3]{n^3\left(\frac{4n^2-n^3}{n^3}\right)}+\left(\sqrt[3]{n^3\left(\frac{4n^2-n^3}{n^3}\right)}\right)^2}=\frac{4n^2}{n^2-n^2.\sqrt[3]{\frac{4}{n}-1}+n^2\left(\sqrt[3]{\frac{4}{n}-1}\right)^2}$$

$$=\frac{4n^2}{n^2\left[1-\sqrt[3]{\frac{4}{n}-1}+\left(\sqrt[3]{\frac{4}{n}-1}\right)^2\right]}=\frac{4}{1-\sqrt[3]{\frac{4}{n}-1}+\left(\sqrt[3]{\frac{4}{n}-1}\right)^2}.$$

Do đó $\lim u_n=\lim-\dfrac{1-\sqrt[3]{\frac{4}{n}-1}+\left(\sqrt[3]{\frac{4}{n}-1}\right)^2}{4\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{n}}\right)}=-\dfrac{3}{16}$.

c). $u_n=2n-\sqrt{9n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}=\left(3n-\sqrt{9n^2+n}\right)+\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$.

Tính $\lim\left(3n-\sqrt{9n^2+n}\right)=\lim\dfrac{\left(3n-\sqrt{9n^2+n}\right)\left(3n+\sqrt{9n^2+n}\right)}{\left(3n+\sqrt{9n^2+n}\right)}$

$$=\lim\frac{-n}{3n+\sqrt{9n^2+n}}=\lim\frac{-n}{3n+\sqrt{n^2\left(\frac{9n^2+n}{n^2}\right)}}$$

$$=\lim\frac{-n}{3n+n\sqrt{9+\frac{1}{n}}}=\lim\frac{-n}{n\left(3+\sqrt{9+\frac{1}{n}}\right)}=\lim\frac{-1}{3+\sqrt{9+\frac{1}{n}}}=-\frac{1}{6}$$

Và $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$$=\lim\frac{2n}{\sqrt{n^2\left(\frac{n^2+2n}{n^2}\right)}+n}=\lim\frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n}=\lim\frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=1.$$

Do đó $\lim u_n=-\frac{1}{6}+1=\frac{5}{6}$.

d). $u_n=\sqrt{n^2-2n}+2\sqrt[3]{n^2-8n^3}+3\sqrt{n^2+n}=\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)+\left(2\sqrt[3]{n^2-8n^3}+4n\right)$

$+\left(3\sqrt{n^2+n}-3n\right)=\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)+2\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}+2n\right)+3\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

- Tính $\lim\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-2n}+n\right)}{\sqrt{n^2-2n}+n}=\lim\frac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n}$

$$=\lim\frac{-2n}{\sqrt{n^2\left(\frac{n^2-2n}{n^2}\right)}+n}=\lim\frac{-2n}{n\sqrt{1-\frac{2}{n}}+n}=\lim\frac{-2n}{n\left(\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1\right)}=\lim\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1}=-1.$$

- Tính $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}+2n\right)$

$$=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}+2n\right)\left[\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}\right)^2-2n.\sqrt[3]{n^2-8n^3}+4n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}\right)^2-2n.\sqrt[3]{n^2-8n^3}+4n^2}$$

$$=\lim\frac{n^2}{\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}\right)^2-2n.\sqrt[3]{n^2-8n^3}+4n^2}\quad(1)$$

Có $\sqrt[3]{n^2-8n^3}=\sqrt[3]{n^3\left(\frac{n^2-8n^3}{n^3}\right)}=n.\sqrt[3]{\frac{1}{n}-8}\Rightarrow\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}\right)^2=n^2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}-8}\right)^2$

Do đó $(1)\Leftrightarrow\lim\frac{n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}-8}\right)^2-2n^2.\sqrt[3]{\frac{1}{n}-8}+4n^2}=\lim\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}-8}\right)^2-\sqrt[3]{\frac{1}{n}-8}+4}=\frac{1}{12}.$

- Tính $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2\left(\dfrac{n^2+n}{n^2}\right)}+n}=\lim\dfrac{n}{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+n}=\lim\dfrac{n}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right)}=\lim\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Từ đó suy ra $\lim u_n=-1+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{12}$.