Câu 3: Cho dãy số (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 3u_n + 10$ với mọi $n \ge 1$.
Chứng minh rằng: $u_n = 2.3^n - 5 \quad \forall n \ge 1$.

LỜI GIẢI

Ta sẽ chứng minh $u_n = 2.3^n - 5 \ (1)$ bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có: $u_1 = 2.3^1 - 1 = 1$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k\left(k \in N^*\right)$. Có nghĩa là ta có: $u_k = 2.3^k - 5 \ (2)$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$u_{n+1} = 2.3^{k+1} - 5$.

Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) và từ (2) ta có:

$u_{k+1} = 3u_k + 10 = 3.\left(2.3^k - 5\right) + 10 = 2.3^k.3 - 15 + 10 = 2.3^{k+1} - 5$ (đpcm).

Câu 4 : Cho dãy số (u_n), biết $u_1 = 3, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ với $n \ge 1, n \in ¥$

a). Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số.

b). Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

LỜI GIẢI

a). Ta có:

$u_2 = \sqrt{1 + u_1^2} = \sqrt{10}$

$u_3 = \sqrt{1 + u_2^2} = \sqrt{11}$

$u_4 = \sqrt{1 + u_3^2} = \sqrt{12}$

$u_5 = \sqrt{1 + u_4^2} = \sqrt{13}$

b). Ta có: $u_1 = \sqrt{1+8}, u_2 = \sqrt{2+8}, u_3 = \sqrt{3+8}, u_4 = \sqrt{4+8}, u_5 = \sqrt{5+8}$.

Ta dự đoán $u_n = \sqrt{n+8} \ (1)$

Với $n = 1$, có: $u_1 = \sqrt{1+8} = 3$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n = 1$

Giả sử (1) đúng với $n = k$, có nghĩa ta có: $u_k = \sqrt{k+8} \quad (2)$

Ta cần chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$. Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = \sqrt{k+9}$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2) ta có:

$u_{k+1} = \sqrt{1 + u_k^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{k+8})^2} = \sqrt{k+9}$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$. Kết luận $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 5 : Cho tổng $S_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

a). Tính S_1, S_2, S_3.

b). Dự đoán công thức tính tổng S_n và chứng minh bằng quy nạp.

LỜI GIẢI

Ta có $S_1 = \dfrac{1}{1.2} = \dfrac{1}{2}, S_2 = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} = \dfrac{2}{3}, S_3 = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} = \dfrac{3}{4}$

b). Dự đoán $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ (1)

với $n=1$, ta có $S_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$. Vậy (1) đúng với $n=1$.

Giả sử (1) đúng với $n=k$, có nghĩa ta có $S_k = \dfrac{k}{k+1}$.

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh $S_{k+1} = \dfrac{k+1}{k+2}$

Thật vậy ta có: $S_{k+1} = S_k + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k}{k+1} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \text{ (đúng).}$$

Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ là dãy số bị chặn.

Thật vậy ta có $n + \dfrac{1}{n} \ge 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \dfrac{n^2+1}{n} \ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{n}{n^2+1} \le \dfrac{1}{2}$ $(*)$

Và hiển nhiên $0 < \dfrac{n}{n^2+1}$ $(**)$

Từ (*) và (**) suy ra Dãy số (u_n) bị chặn.

Câu 6: Tìm 5 số hạng đầu và tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau :

a). $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ b). $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \ge 1, n \in \mathbb{N}$

LỜI GIẢI

a). Ta có:

$u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$. $u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

$u_4 = \dfrac{u_3}{1+u_3} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{4}$. $u_5 = \dfrac{u_4}{1+u_4} = \dfrac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{5}$.

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng: $u_n = \dfrac{1}{n}, \forall n \ge 1.(*)$

Ta dùng phương pháp quy nạp để chứng minh công thức $(*)$

Đã có: $(*)$ đúng với $n=1$

Giả sử $(*)$ đúng khi $n=k$. Nghĩa là ta có: $u_k = \dfrac{1}{k}$

Ta chứng minh $(*)$ đúng khi $n=k+1$. Nghĩa là ta phải chứng minh: $u_{k+1} = \dfrac{1}{k+1}$.

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1}=\frac{u_k}{1+u_k}=\frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}}=\frac{\frac{1}{k}}{\frac{k+1}{k}}=\frac{1}{k+1}$.

Kết luận: $(*)$ đúng khi $n=k+1$,suy ra $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

b). Ta có :

$u_2=u_1+3=2=3.2-4$

$u_3=u_2+3=5=3.3-4$

$u_4=u_3+3=8=3.4-4$

$u_5=u_4+3=11=3.5-4$

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng: $u_n=3n-4, \forall n\geq 1.(*)$

Ta dùng phương pháp quy nạp để chứng minh công thức $(*)$

Đã có: $(*)$ đúng với $n=1$

Giả sử $(*)$ đúng khi $n=k$. Nghĩa là ta có: $u_k=3k-4$

Ta chứng minh $(*)$ đúng khi $n=k+1$. Nghĩa là ta phải chứng minh: $u_{k+1}=3(k+1)-4$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1}=u_k+3=3k-4+3=3(k+1)-4$

Kết luận: $(*)$ đúng khi $n=k+1$,suy ra $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n=1$ và $u_{n+1}=-\frac{3}{2}u_n^2+\frac{5}{2}u_n+1 \quad \forall n\geq 1$.

a). Hãy tính u_2, u_3 và u_4

b). Chứng minh rằng: $u_n=u_{n+3}$ với mọi $n\geq 1$.

LỜI GIẢI

a).Ta có: $u_2=-\frac{3}{2}u_1^2+\frac{5}{2}u_1+1=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+1=2$.

$u_3=-\frac{3}{2}u_2^2+\frac{5}{2}u_2+1=-\frac{3}{2}2^2+\frac{5}{2}.2+1=0$

$u_4=-\frac{3}{2}u_3^2+\frac{5}{2}u_3+1=-\frac{3}{2}.0^2+\frac{5}{2}.0+1=1$

b). Ta sẽ chứng minh $u_n=u_{n+3}, \forall n\geq 1$.

Với $n=1$, ta có: $u_1=u_4=1$ (đúng)

Giả sử đẳng thức đúng với $n=k$, có nghĩa là ta có: $u_k=u_{k+3}$

Ta cần phải chứng minh đẳng thức đúng với $n=k+1$ có nghĩa là chứng minh:

$u_{k+1}=u_{k+4}$

Ta có: $u_{k+4}=-\frac{3}{2}u_{k+3}+\frac{5}{2}u_{k+3}+1=-\frac{3}{2}u_k^2+\frac{5}{2}u_k+1=u_{k+1}$. (đúng)

Câu 8: Cho dãy số (u_n) với $u_{n+1}=5.4^{n-1}+3$.

a) Chứng minh rằng: $u_{n+1}=4u_n-9$ với mọi $n\geq 1$.

b) Dựa vào kết quả câu a) , hãy cho dãy số (u_n) bởi hệ thức truy hồi.

LỜI GIẢI

a) Ta có: $u_{n+1}=5.4^n+3=4.5.4^{n-1}+3=4\left(5.4^{n-1}+3\right)-9=4u_n-9$.

b) Theo công thức xác định $\left(u_n\right)$, ta có:

$u_1=5.4^{1-1}+3=8$. Vì thế kết hợp kết quả câu a) suy ra ta có thể cho dãy số $\left(u_n\right)$ bởi: $u_1=8$ và $u_{n+1}=4u_n-9$ với mọi $n\geq 1$.

Câu 9: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1=11 \\ u_{n+1}=10u_n+1-9n, \forall n\in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát u_n theo n.

LỜI GIẢI

Ta có $u_1=11=10+1$

$u_2=10.11+1-9=102=100+1=10^2+2$

$u_3=10.102+1-9.2=1003=1000+3=10^3+3$.

Từ đó dự đoán $u_n=10^n+n \quad (1)$. Chứng minh:

Với $n=1$ ta có $u_1=10^1+1=11$ (đúng).

Giả công thức (1) đúng với $n=k$, ta có $u_k=10^k+k \quad (2)$.

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh $u_{k+1}=10^{k+1}+(k+1)$. Thật vậy $u_{k+1}=10\left(10^k+k\right)+1-9k=10^{k+1}+(k+1)$.

Kết luận $u_n=10^n+n, \forall n\in \mathbb{N}$.

hoc360.net