1. Vì $B \in Oy \Rightarrow B(0;b;0) \Rightarrow OB = 2OA \Leftrightarrow b^2 = 36 \Leftrightarrow b = \pm 6$

- $b = 6 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2;4;-1)$ nên phương trình $\Delta : \frac{x}{2} = \frac{y-6}{4} = \frac{z}{-1}$
- $b = -6 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2;-8;-1)$ nên phương trình $\Delta : \frac{x}{2} = \frac{y+6}{-8} = \frac{z}{-1}$.

2. Ta có $C(2+t;3-2t;-1+t) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = (2+t;3-2t;-1+t)$, $\overrightarrow{OB} = (1;1;2)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right] = (5t-7;t+5;1-3t) \Rightarrow S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right\|$

Do đó

$\left\|\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right\| = \sqrt{83} \Leftrightarrow (5t-7)^2 + (t+5)^2 + (1-3t)^2 = 83 \Leftrightarrow t = 2, t = -\frac{4}{35}$

- $t = 2 \Rightarrow C(4;-1;1) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (3;-2;-1)$, phương trình

$\Delta : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$

- $t = -\frac{4}{35} \Rightarrow C\left(\frac{66}{35};\frac{113}{35};-\frac{39}{35}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \left(\frac{31}{35};\frac{78}{35};-\frac{109}{35}\right)$,

phương trình $\Delta : \frac{x-1}{31} = \frac{y-1}{78} = \frac{z-2}{-109}$.

Bài 7

1. Đường thẳng Δ_1 qua điểm $M_1(1;\ -1;\ 0)$ và có $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (2;\ 1;\ -1)$. Đường thẳng Δ_1 qua điểm $M_2(3;\ 0;\ -1)$ và có $\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (-1;\ 2;\ 1)$.

Hệ phương trình tương giao của Δ_1 và Δ_2 là:

$$\begin{cases} 1+2t_1 = 3-t_2 \\ -1+t_1 = 2t_2 \\ -t_1 = -1+t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_1 + t_2 = 2 \\ t_1 - 2t_2 = 1 \\ t_1 + t_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 0 \end{cases}.$$

Do đó hai đường thẳng cắt nhau tại điểm $I(3;\ 0;\ -1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}},\ \overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right]=(3;\ -1;\ 5)$ nên phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là $3x-y+5z-4=0$.

2. Vì $M\in\Delta_1$ nên $M(1+2t;\ -1+t;\ -t)$.

Ta có: $\overrightarrow{M_2M}(2t-2;\ -1+t;1-t),\ \left[\overrightarrow{M_2M},\ \vec{u}_{\Delta_2}\right]=(3t-3;\ 1-t;\ 5t-5)$.

Do đó

$$d(M,\Delta_2)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_2M},\ \vec{u}_{\Delta_2}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{\Delta_2}\right|}=\frac{\sqrt{(3t-3)^2+(1-t)^2+(5t-5)^2}}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}=|t-1|\sqrt{\frac{35}{6}}.$$

Theo giả thiết ta có $|t-1|\sqrt{\dfrac{35}{6}}=\dfrac{\sqrt{210}}{3}\Leftrightarrow|t-1|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-1\end{array}\right.$.

Từ đó ta có tọa độ điểm M cần tìm là $M(7;\ 2;\ -3)$ hoặc $M(-1;-2;1)$.

3. Hai đường thẳng cắt nhau tại $I(3;\ 0;\ -1)$.

Xét hai điểm thuộc hai đường thẳng là $A(1;\ -1;\ 0),\ B(2;2;0)$.

Ta có $\overrightarrow{IA}(-2;\ -1;\ 1),\left|\overrightarrow{IA}\right|=\sqrt{6}$ và $\overrightarrow{IB}(-1;\ 2;\ 1),\left|\overrightarrow{IB}\right|=\sqrt{6}$ nên véc tơ đơn vị của Δ_1 và Δ_2 lần lượt là:

$$\vec{e}_1=\frac{\overrightarrow{IA}}{\left|\overrightarrow{IA}\right|}=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\ \vec{e}_2=\frac{\overrightarrow{IB}}{\left|\overrightarrow{IB}\right|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng là đường thẳng qua I và có véc tơ chỉ phương là $\vec{e}_1+\vec{e}_2=\left(-\dfrac{3}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-3;\ 1;\ 2)$, hoặc

$$\vec{e}_1-\vec{e}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{3}{\sqrt{6}};\ 0\right)=-\frac{1}{\sqrt{6}}(1;\ 3;\ 0).$$

Vậy phương trình tham số của các đường phân giác cần tìm là

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3t \\ z = -1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Bài 8

1. Giải theo hai cách.

Cách 1: Vì Δ đi qua điểm $A(2; 0; 3)$ và vuông góc với Δ_1 nên Δ thuộc mặt phẳng (α) qua $A, (\alpha) \perp \Delta_1$ có phương trình $x + 2y - z + 1 = 0$.

Gọi $A' = \Delta \cap \Delta_1$ thì $A' = (\alpha) \cap \Delta_1$ nên tọa độ của A' thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{-1} \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A'\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{5}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AA'}\left(-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{5}{3}; -\dfrac{13}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}(4; 5; 13)$ nên phương trình chính tắc của đường thẳng cần tìm là $\Delta: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-3}{13}$.

Cách 2: Gọi $A' = \Delta \cap \Delta_1$ thì $A'(1+t; -1+2t; -2-t)$.

Ta có $\overrightarrow{AA'}(t-1; 2t-1; -t-5)$. Mà $\Delta \perp \Delta_1$ nên $\overrightarrow{AA'}.\vec{u}_{\Delta_1} = 0$, hay

$$t - 1 + 2(2t-1) + t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}.$$

Do đó $\overrightarrow{AA'}\left(-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{5}{3}; -\dfrac{13}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}(4; 5; 13)$ nên ta có phương trình đường thẳng Δ là $\Delta: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-3}{13}$.

2. Δ thuộc mặt phẳng (β), với (β) đi qua $B(1; -1; 1)$ và $(\beta) \perp d_1$ nên (β) có phương trình là $2x + 3y + z = 0$.

Gọi $B' = \Delta \cap d_2$ thì $B' = (\beta) \cap d_2$ nên tọa độ của B' thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+3}{3} \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow B'(3; -2; 0)$.

Vì $\overrightarrow{BB'}(2; -1; -1)$ nên phương trình chính tắc của Δ là

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-1}.$$

3. Vì Δ song song $(Q): 5x + 2y + 7z + 7 = 0$ nên Δ thuộc mặt phẳng (P) qua $C(0; -4; 0)$ và $(P) // (Q)$.

Phương trình mặt phẳng (P): $5x + 2y + 7z + 8 = 0$.

Gọi $C' = \Delta \cap d_2$ thì $C' = (P) \cap d$ nên tọa độ của C' thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z}{1} \\ 5x + 2y + 7z + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow C'(-1;\ 2;\ -1).$

Vì $\overrightarrow{CC'}(-1;\ 6;\ -1)$ nên phương trình chính tắc của Δ là

$\Delta:\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+4}{-6} = \dfrac{z}{1}.$

Bài 9

1. Góc giữa đường thẳng Δ và (α) là 30^0. Điểm $A(-1;\ 0;\ 4)$.

Ta có $B(-3+2t;\ -1+t;\ 3+t)$ và $AB = \sqrt{6}$ nên $B(-3;\ -1;\ 3)$ hoặc $B(1;\ 1;\ 5)$. Vì $BA = 2BC = \sqrt{6}$ và $ABC = 60^0$ nên tam giác ABC vuông tại C. Suy ra $BAC = 30^0$ do đó điểm C là hình chiếu của điểm B trên mặt phẳng (α). Từ đó ta tìm được hai điểm C tương ứng với hai điểm B ở trên là $C\left(-\dfrac{5}{2};\ 0;\ \dfrac{5}{2}\right)$ hoặc $C\left(\dfrac{1}{2};\ 0;\ \dfrac{11}{2}\right)$.

2. Vì $B \in d \Rightarrow B\left(1+t; 2+2t; -t\right)$, khi đó

$d\left(B,(\alpha)\right) = \dfrac{\left|2t+2\right|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \left|t+1\right| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -4 \end{array}\right.$

- $t = 2 \Rightarrow B(3;6;-2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(1;3;-1\right)$, suy ra phương trình Δ là:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{3} = \frac{z+2}{-1}.$$

- $t = -2 \Rightarrow B(-3;-6;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-5;-9;3\right)$, suy ra phương trình Δ là:

$$\frac{x+3}{-5} = \frac{y+6}{-9} = \frac{z-2}{3}.$$

Bài 10

1. Đường thẳng Δ_1 đi qua $M_1\left(1;-1;3\right)$ có $\overrightarrow{u_1} = \left(1;2;-1\right)$ là VTCP

Đường thẳng Δ_2 đi qua $M_2\left(2;3;-9\right)$ có $\overrightarrow{u_2} = \left(3;2;-2\right)$ là VTCP

$\overrightarrow{M_2M_1} = (-1;-4;12)$, $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] = \left(-2;-1;-4\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_2M_1} = -42 \neq 0$

Suy ra hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 chéo nhau và khoảng cách giữa chúng là :

$$d(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_2M_1}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}=\frac{42}{\sqrt{21}}=2\sqrt{21}.$$

2. Gọi H là hình chiếu của C lên đường thẳng Δ_1, khi đó :

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}CH.AB=CH$$

Do đó tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi CH nhỏ nhất

Hay CH là đường vuông góc chung của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2.

Ta có : $C(1+t;-1+2t;3-t)$, $H(2+3t';3+2t';-9-2t')$

$\Rightarrow \overrightarrow{HC}=(t-3t'-1;2t-2t'-4;-t+2t'+12)$

Mà $\begin{cases}HC\perp\Delta_1\\HC\perp\Delta_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t-3t'=7\\9t-17t'=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\t'=-1\end{cases}$

Vậy $C(3;3;1)$ là điểm cần tìm.

3. Vì $M\in\Delta_1, N\in\Delta_2$ nên suy ra

$M(1+a;-1+2a;3-a)$, $N(2+3b;3+2b;-9-2b)$

$\Rightarrow \overrightarrow{NM}=(a-3b-1;2a-2b-4;-a+2b+12)$

Theo giả thiết bài toán ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}MN^2=(a-3b-1)^2+(2a-2b-4)^2+(a-2b-12)^2=180\\\cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{u_1}\right|}{\left|\overrightarrow{NM}\right|.\left|\overrightarrow{u_1}\right|}=\dfrac{|3(2a-3b-7)|}{6\sqrt{30}}=\sqrt{\dfrac{8}{15}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-3b-1)^2+(2a-2b-4)^2+(a-2b-12)^2=180 & (1)\\|2a-3b-7|=4 & (2)\end{cases}$$