12. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c phương trình
$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ có ít nhất một nghiệm.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ thì $f(x)$ liên tục trên R.

Không giảm tính tổng quát, giả sử $a\le b\le c$

-Nếu $a=b$ hoặc $b=c$ thì $f(b)=(b-a)(b-c)=0.$ suy ra phương trình có nghiệm $x=b$

-Nếu $a<b<c$ thì $f(b)=(b-a)(b-c)<0$ và $f(a)=(a-b)(a-c)>0$ do đó tồn tại x_0 thuộc khoảng $(a;b)$ để $f(x_0)=0.$

Vậy phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm.

8. Chứng minh phương trình $2x^3-6x+3=0$ có ba nghiệm trên khoảng $(-2;2)$.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=2x^3-6x+3$ thì $f(x)$ liên tục trên R.

$f(-2)=-16+12+3=-1<0;f(-1)=-2+6+3>0$

$f(1)=2-6+3=-1<0;f(2)=16-12+3=7>0$

Do đó $f(-2).f(-1)<0;f(-1).f(1)<0;f(1).f(2)<0.$ từ tính chất của hàm số liên tục , suy ra $f(x)$ có nghiệm thuộc khoảng $(-2;-1),(-1;1),(1;2)$ suy ra phương trình có ba nghiệm trên khoảng $(-2;2)$.

10. Chứng minh rằng với mọi a, b, c phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ thì $f(x)$ liên tục trên R.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists x_1>0$ để $f(x_1)>0.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow \exists x_2>0$ để $f(x_2)<0.$

Như vậy có x_1,x_2 để $f(x_1).f(x_2)<0$ suy ra phương trình có nghiệm $x\in(x_1;x_2)$ vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

11. Chứng minh rằng với mọi a, b, c phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx-1=0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx-1$ thì $f(x)$ liên tục trên R.

Ta có: $f(0)=-1;$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists x_1>0$ để $f(x_1)>0.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists x_2<0$ để $f(x_2)>0.$

Do đó $f(0).f(x_2)<0$ suy ra phương trình có nghiệm trong khoảng $(x_2;0)$

$f(0).f(x_1)<0$ suy ra phương trình có nghiệm trong khoảng $(0;x_1)$ mà các khoảng $(x_2;0)$ và $(0;x_1)$ không giao nhau, do đó phương trình có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

12. Chứng minh rằng phương trình $64x^6-96x^4+36x^2-3=0$ có nghiệm x_0 mà

$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} < x_0 < \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$.

LỜI GIẢI

Cách 1: Đặt $y = 4x^2$ ta có phương trình $y^3 - 6y^2 + 9y - 3 = 0 \quad (2)$

Ta chứng minh phương trình (2) có nghiệm $y \in \left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}; 2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$

Đặt $t = y - 2$ phương trình (2) trở thành:

$(t+2)^3 - 6(t+2)^2 + 9(t+2) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow t^3 + 6t^2 + 12t + 8 - 6t^2 - 24t - 24 + 9t + 18 - 3 \Leftrightarrow t^3 - 3t - 1 = 0. \quad (3)$

Ta chứng minh (3) có nghiệm trong khoảng $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}; \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$

Đặt $f(t) = t^3 - 3t - 1$ thì $f(t)$ liên tục trên R.

Ta có $\sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{3,42} < 1,85$; $\sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{3,4} > 1,84$.

Nên $f\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) < 1,85^3 - 3.1,84 - 1 < 6,35 - 5,52 - 1 < 0$

Và $\sqrt{2+\sqrt{3}} < \sqrt{3,74} < 1,94; \sqrt{2+\sqrt{3}} > \sqrt{3,73} > 1,93$.

Do đó $f\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) > 1,93^2 - 3.1,94 - 1 > 7,18 - 5,82 - 1 > 0$

Suy ra $f\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).f\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) < 0$ vậy phương trình (3) có nghiệm $t \in \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}; \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$ từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2: (sử dụng lượng giác)

Từ công thức $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2+2\cos 2\alpha}}{2}$.

Do đó $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{2+2\cos\alpha}}{2}; \cos\dfrac{\alpha}{4} = \dfrac{\sqrt{2+2\cos\dfrac{\alpha}{2}}}{2}$ hay $\cos\dfrac{\alpha}{4} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\alpha}}}{2}$ với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Từ công thức này suy ra: $\cos\dfrac{\pi}{16} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}; \cos\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$

Nghiệm x_0 của phương trình đã cho có thể tìm được dưới dạng : $x_0 = \cos\beta$, sao cho $\dfrac{\pi}{24} < \beta < \dfrac{\pi}{16}$.

Đặt $x = \cos\beta$, phương trình đã cho trở thành:

$64\cos^6\beta - 96\cos^4\beta + 36\cos^2\beta - 2 = 1$

$\Leftrightarrow 2\left[2\left(16\cos^6\beta - 24\cos^4\beta + 9\cos^2\beta\right) - 1\right] = 1 \Leftrightarrow 2\left(4\cos^3\beta - 3\cos\beta\right)^2 - 1 = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2(3\beta) - 1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 6\beta = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = \pm\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{3} (k = 0;1;2..)$

Lấy $\beta = \dfrac{\pi}{18}$ ta được $\dfrac{\pi}{24} < \beta < \dfrac{\pi}{16}$ và nghiệm $x_0 = \cos\dfrac{\pi}{18}$ thỏa mãn điều kiện đã nêu.